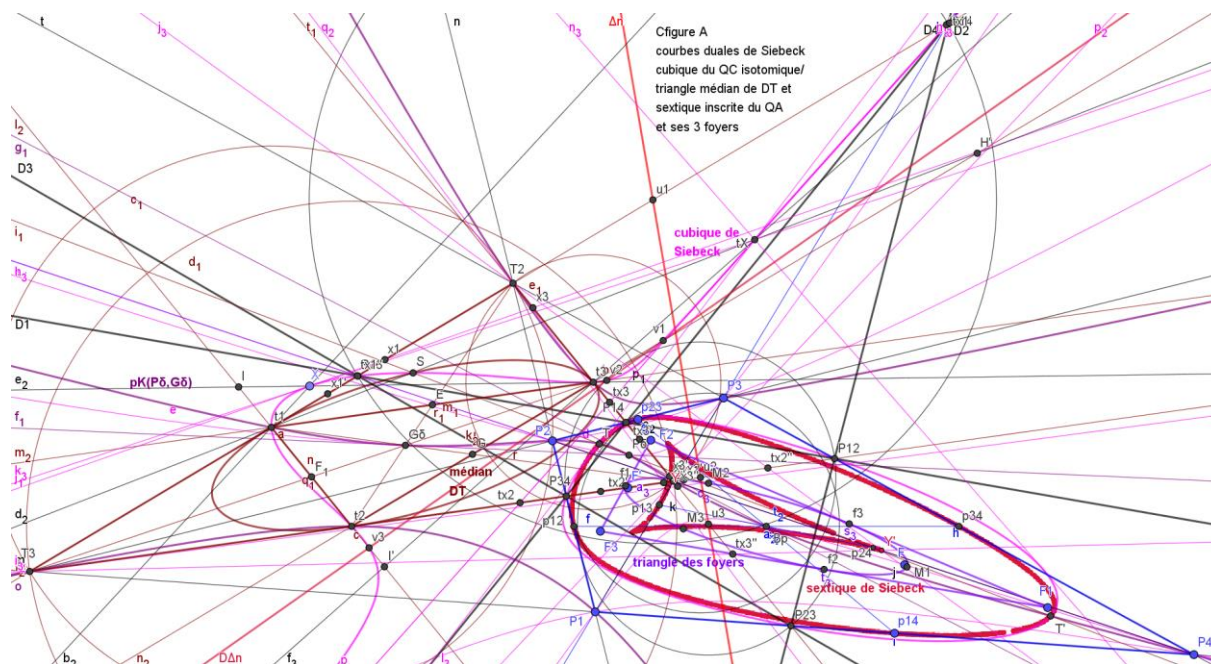


Le Buy (Dordogne 24), mai 2018

Bernard Keizer
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Théorème de Cayley-Bacharach et généralisation du théorème de Marden (cubique et sextique duales de Siebeck)



Résumé

Ce dernier article montre d'abord le théorème de Cayley-Bacharach et le 9^{ème} point C-B d'un groupe de 8 points tel qu'il passe un faisceau de cubiques par ces 9 points. Il présente ensuite le théorème de Marden et les 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle ; sa généralisation par Siebeck avec les n foyers des courbes de classe n permet une application au QA avec les 3 foyers de la sextique inscrite de classe 3, duale d'une cubique particulière du QC dual. On en profite enfin pour tracer les cubiques du QA duales des courbes de classe 3 du QC (cardioïde, deltoïde et cayleyenne).

Abstract

This last article shows first the Cayley-Bacharach theorem and the 9th C-B point of a group of 8 points such as there is a set of cubics passing through these 9 points. It presents then the Marden's theorem with the 2 foci of the triangle's Steiner inellipse ; it's generalization by Siebeck with the n foci of the curves of class n allows an application to the QA with the 3 foci of the inscribed sextic of class 3, dual of a particular cubic of the dual QL. Last, we use the opportunity of drawing the QA's cubics duals of the curves of class 3 of the QL (cardioid, deltoid and cayleyan).

Zusammenfassung

Dieser letzte Artikel zeigt zuerst den Satz von Cayley-Bacharach und den 9^{ten} C-B Punkt einer Gruppe von 8 Punkten, so dass es ein Netz von Kubiken durch diese 9 Punkten gibt. Er stellt dann den Satz von Marden mit den 2 Brennpunkten der Steiner Inellipse des Dreiecks ; Siebeck's Generalisierung mit den n Brennpunkten aller Kurven n^{ter} Klasse erlaubt eine Anwendung zum Vierpunkt mit den 3 Brennpunkten der einbeschriebenen Sextik 3^{ter} Klasse, duale Kurve einer speziellen Kubik des dualen Vierseits. Wir benutzen zuletzt die Gelegenheit, um die Kubiken des Vierpunkts duale Kurven der Kurven 3^{ter} Klasse des Vierseits (Kardioïd, Deltoïd und Cayleysche Kurve) zu zeichnen.

Introduction

J'avais un double regret après la courte présentation résumée de mes 4 articles dans « Un joli puzzle géométrique » (*) : ne pas avoir évoqué le théorème de Cayley-Bacharach et ne pas avoir présenté le théorème de Marden avec les 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle et sa généralisation par Siebeck avec les 3 foyers de la sextique inscrite de classe 3 du QA. Il ne me restait plus, en utilisant Geogebra, qu'à tracer des cubiques et leurs courbes duales de classe 3 et qu'à calculer les racines cubiques d'une équation complexe de degré 3 pour identifier la sextique inscrite du QA et ses 3 foyers.

(*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014

Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation ψ 2015

Le Quadrangle et le Quadrilatère Complets comme figures duales et leurs isocubiques 2016

Un joli puzzle géométrique 2017

<http://bernardkeizer.blogspot.fr>

Sommaire

Introduction

A. Théorème de Cayley-Bacharach et construction de Cotterill

- 1) Théorème de Cayley-Bacharach
- 2) Construction de Cotterill (foyer du QA et 9^{ème} point C-B)

B. Quadrangle et Quadrilatère Complets et dualité

1. Rappel de la dualité
2. Exemples de faisceaux de cubiques du QA/QC
 - a) faisceau d'isocubiques pivotales du QA passant par 2 points conjugués ϕ
 - b) 4 cubiques circulaires dégénérées (cercle + droite) du QC passant par M
 - c) 4 cubiques dégénérées (conique + droite) du QC pour un triangle cévien
 - d) 4 cubiques dégénérées (conique + droite) du QC pour le S-triangle

C. Isocubiques pivotales du QA et non pivotales du QC

1. Isocubique pivotale du QA $pK(P\delta, P)$
2. Faisceau d'isocubiques non pivotales du QC de triangle $T(P)$
3. Exemples connus
 - a) isocubique circulaire pivotale du QA $pK(P\delta, Isg)$
 - b) cubique isogonale circulaire focale non pivotale de Van Rees du QC
 - c) stelloïde cubique conjuguée du QC
 - d) cubique isotomique non pivotale de Siebeck du QC
 - e) isocubique non pivotale du QC passant par les S-points
 - f) cubique quasi-isogonale du QA et isocubique pivotale associée

D. Théorème de Marden et généralisation de Siebeck

1. Théorème de Marden et foyers de l'ellipse inscrite de Steiner
2. Théorème de Siebeck et foyers des courbes de classe n
3. Application au QA et sextique inscrite de Siebeck

E. Courbes de classe 3 du QC et cubiques duales

1. Cardioïde et cubique duale
2. Deltoïde et cubique duale
3. Cayleyenne et cubique duale

Remerciements

Mes remerciements vont aux 3 maîtres qui m'ont permis de mener à bien cette aventure : Clark Kimberling pour le triangle (*), Chris van Tienhoven et son infatigable complice Eckart Schmidt pour le QA/QC (**) et Bernard Gibert pour les cubiques (***).

(*) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC www.faculty.evansville.edu

(**) Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF www.chrisvantienhoven.nl

(***) Bernard Gibert Cubics in the Triangle Plane www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr

Figures

A) Courbes duales de Siebeck

(cubique du QC isotomique/ triangle médian de DT et sextique inscrite du QA et ses foyers)

- 1) Faisceau de cubiques passant par 8 points
- 2) Foyer d'un QA et 9^{ème} point C-B (construction de Cotterill)
- 3) QA, QC, DT et dualité
- 4) Faisceau d'isocubiques pivotales du QA passant par 2 points conjugués φ
- 5) Faisceau de 4 cubiques circulaires dégénérées du QC passant par le point M
- 6) Faisceau de 4 cubiques dégénérées du QC de triangle T(P)
- 7) Faisceau de 4 cubiques dégénérées du QC passant par les S-points
- 8) Isocubique pivotale du QA de pivot P/DT ou P*/T(P)
- 9) Faisceau d'isocubiques non pivotales du QC de triangle T(P)
- 10) Isocubique circulaire du QA $pK(P\delta, I_{sg})$
- 11) Cubique circulaire focale de Van Rees du QC (isogonale/orthique DT)
- 12) Stelloïde cubique conjuguée du QC
- 13) Cubique non pivotale de Siebeck du QC (isotomique/median DT)
- 14) Faisceau de cubiques non pivotales du QC passant par les S-points
- 15) Cubique quasi-isogonale du QA et isocubique pivotale associée
- 16) Théorème de Marden et foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle
- 17) 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner et 3 hyperboles équilatères
- 18) Théorème de Siebeck et foyers de la sextique inscrite de Siebeck du QA
- 19) 3 foyers de la courbe de Siebeck et 4 stelloïdes cubiques du QA
- 20) Sextique inscrite de Siebeck du QA, duale de la cubique isotomique du QC
- 21) Cardioïde du QC et cubique duale
- 22) Deltoïde du QC et cubique duale
- 23) Cayleyenne du QC et cubique duale

Ces figures ont été réalisées avec Geogebra version 5.0

Bibliographie

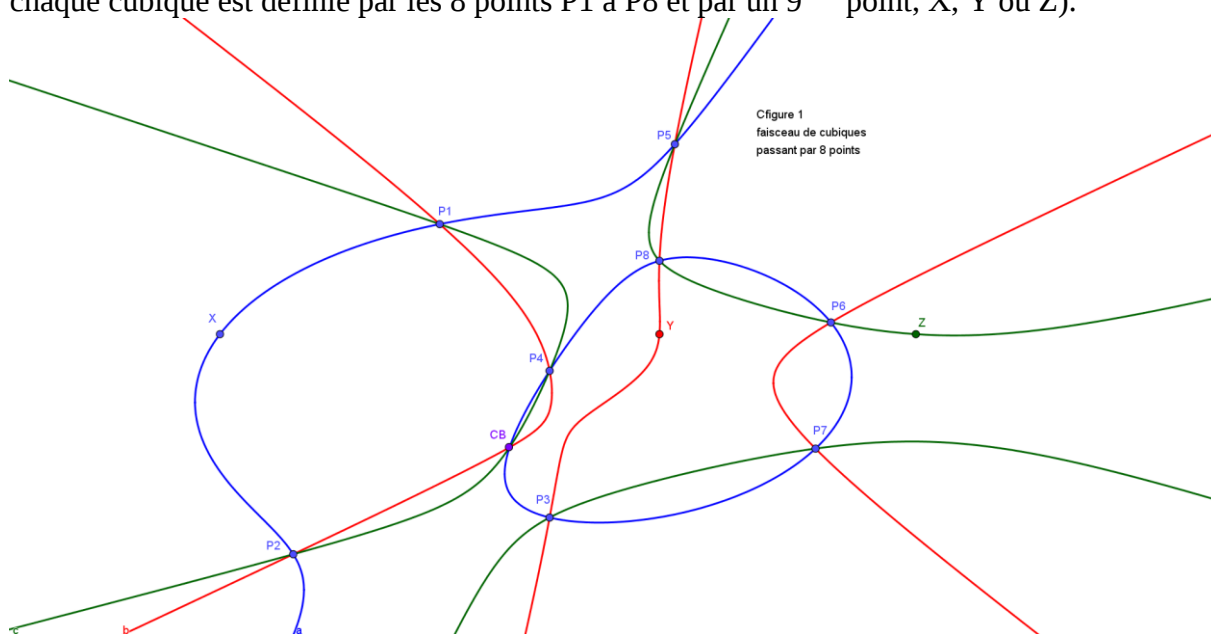
Thomas Cotterill A geometrical property of curves of the third order

Jörg Siebeck Über eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte 1864

A. Théorème de Cayley-Bacharach et construction de Cotterill

1) Théorème de Cayley-Bacharach

Deux cubiques se coupent en 9 points ; du coup, il passe par ces 9 points une infinité de cubiques constituant un faisceau. Dès lors, pour 8 points en configuration générale, il existe un 9^{ème} point C-B tel que par les 9 points il passe un faisceau de cubiques (sur la figure, chaque cubique est définie par les 8 points P1 à P8 et par un 9^{ème} point, X, Y ou Z).

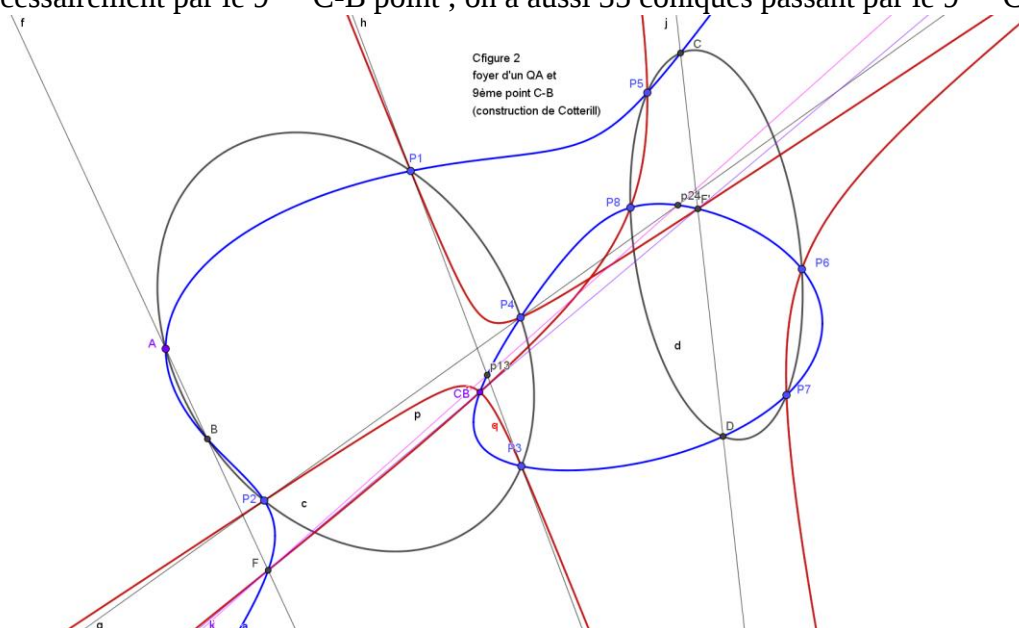


2) Construction de Cotterill (foyer du QA et 9^{ème} point C-B)

Si l'on donne un QA sur une cubique, toutes les coniques circonscrites, y compris les 3 cubiques dégénérées formées de 2 droites passant par les 4 points pris 2 à 2, recoupent la cubique en 2 points ; la 3^{ème} intersection de la droite passant par les 2 points avec la cubique est le foyer du QA sur cette cubique.

Si l'on donne 2 QA sur cette cubique, la 3^{ème} intersection de la droite passant par les 2 foyers avec la cubique est le 9^{ème} C-B point du groupe de 8 points formé par les sommets des 2 QA ; en choisissant les 2 QA parmi 8 points, on a 35 droites passant par le 9^{ème} C-B point.

Toute conique passant par les sommets d'un QA et le foyer de l'autre passe nécessairement par le 9^{ème} C-B point ; on a aussi 35 coniques passant par le 9^{ème} C-B point.



A. Quadrangle et Quadrilatère Complets et dualité

1. Rappel de la dualité

Le QA et le QC sont 2 figures duales de même DT.

La droite duale d'un point est la transformée τ par rapport au QC (droite passant par les conjugués harmoniques des points d'intersection par rapport aux sommets opposés) de la polaire trilinéaire du point par rapport à DT (droite passant par les conjugués harmoniques des sommets du triangle cévien) ou la polaire trilinéaire par rapport à DT du transformé ϕ du point par rapport au QA (point de concours de ses polaires par rapport aux coniques diagonales passant par ses 4 sommets).

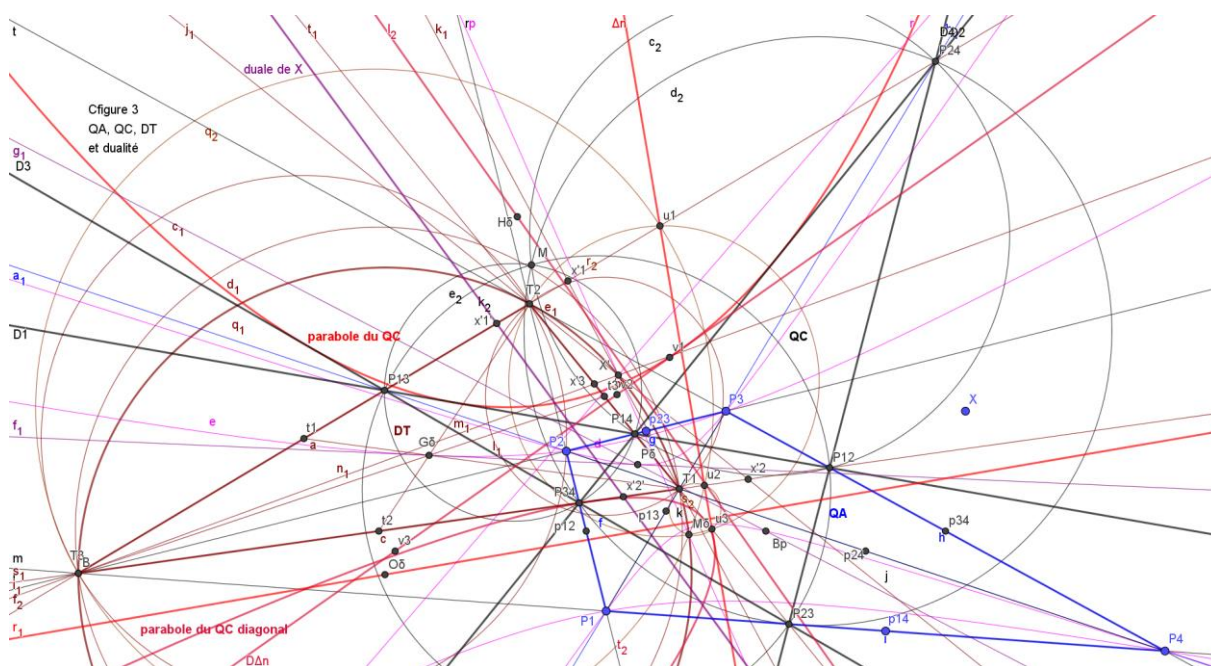
Réciproquement, le point dual d'une droite est le transformé ϕ par rapport au QA de la trilinéaire polaire du point par rapport à DT ou le pôle trilinéaire de la transformée τ de la droite par rapport au QC.

Le triangle DT et le triangle des S-points sont 2 triangles autoduaux, çàd que chaque côté est la droite duale du sommet opposé.

La droite duale de $G\delta$ est la droite de Newton, celle de $P\delta$ est la droite de l'infini et celle du centre de gravité Bp du QA est la droite de Newton du QC diagonal (formé par les 3 diagonales et la droite de Newton).

Il est remarquable que la droite de Newton du QC Δn est, par définition, tangente à la parabole inscrite du QC diagonal et que la droite de Newton du QC diagonal $D \Delta n$ est, pour sa part, tangente à la parabole inscrite du QC. Ces 2 paraboles sont inscrites dans le triangle des S-points ; leurs duales sont les 2 coniques circonscrites aux sommets du QA et passant, l'une par $G\delta$ et $P\delta$ et l'autre par Bp et $P\delta$, qui se coupent en 4 points, $P\delta$ et les S-points.

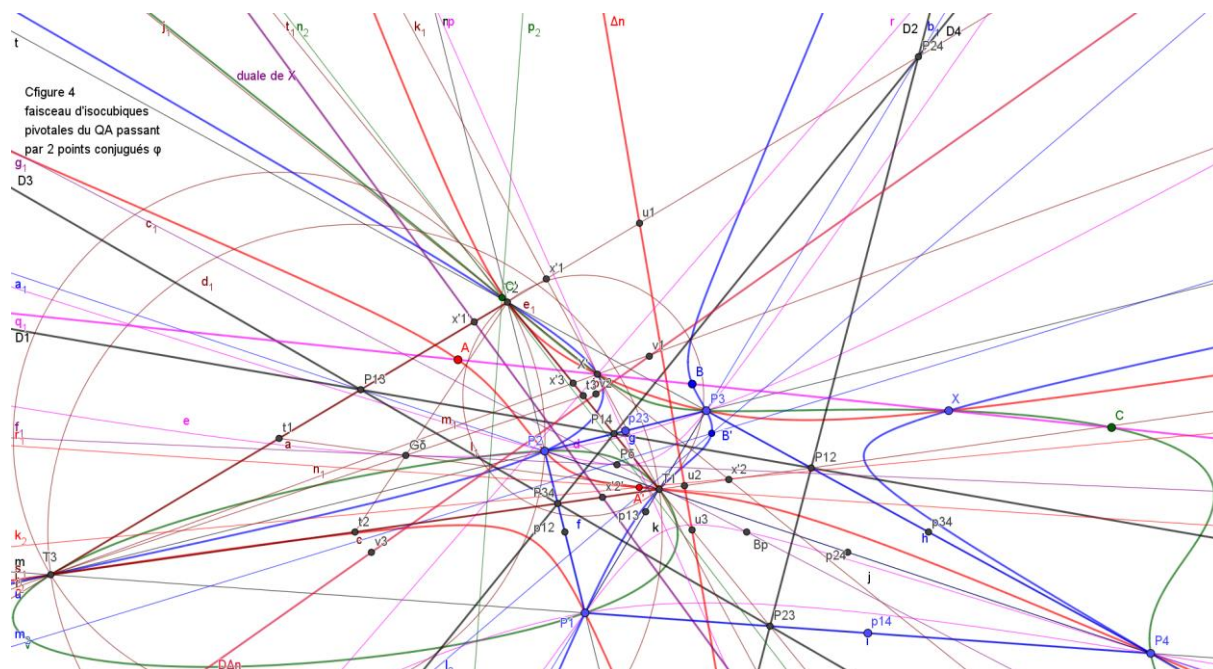
Il convient de noter que les 3 triangles ayant pour côtés 2 côtés opposés du QA et 1 côté de DT constituent des cubiques dégénérées passant par les 4 sommets du QA et les 3 sommets de DT et que le triangle DT lui-même forme une cubique dégénérée passant par les 6 sommets du QC et les 3 sommets de DT.



2. Exemples de faisceaux de cubiques du QA/QC

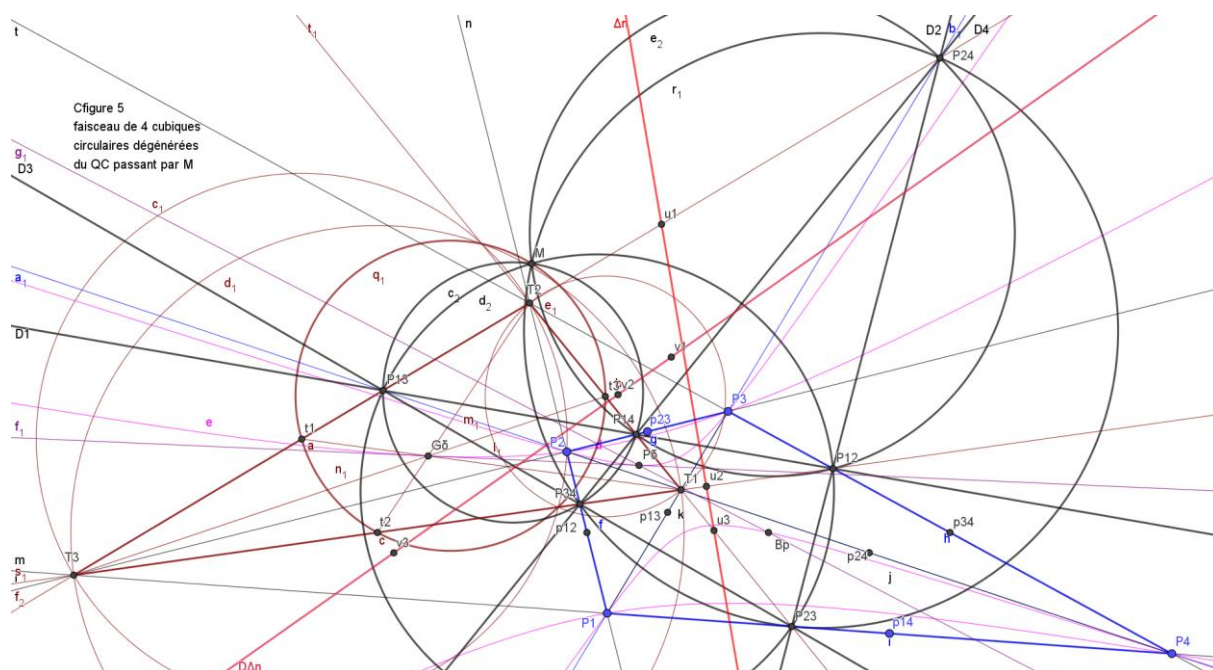
a) faisceau d'isocubiques pivotales du QA passant par 2 points conjugués ϕ

Un point P quelconque sur la droite passant par 2 points conjugués ϕ X et X' détermine une isocubique pivotale $pK(P\delta, P)$ de pivot P par rapport à DT ; elle passe par les 4 sommets du QA, les 3 sommets de DT et les 2 points conjugués, qui constituent un ensemble de 9 points C-B. Chacune passe par P et son conjugué ϕ P' (A et A' , B et B' et C et C').



b) 4 cubiques circulaires dégénérées (cercle + droite) du QC passant par M

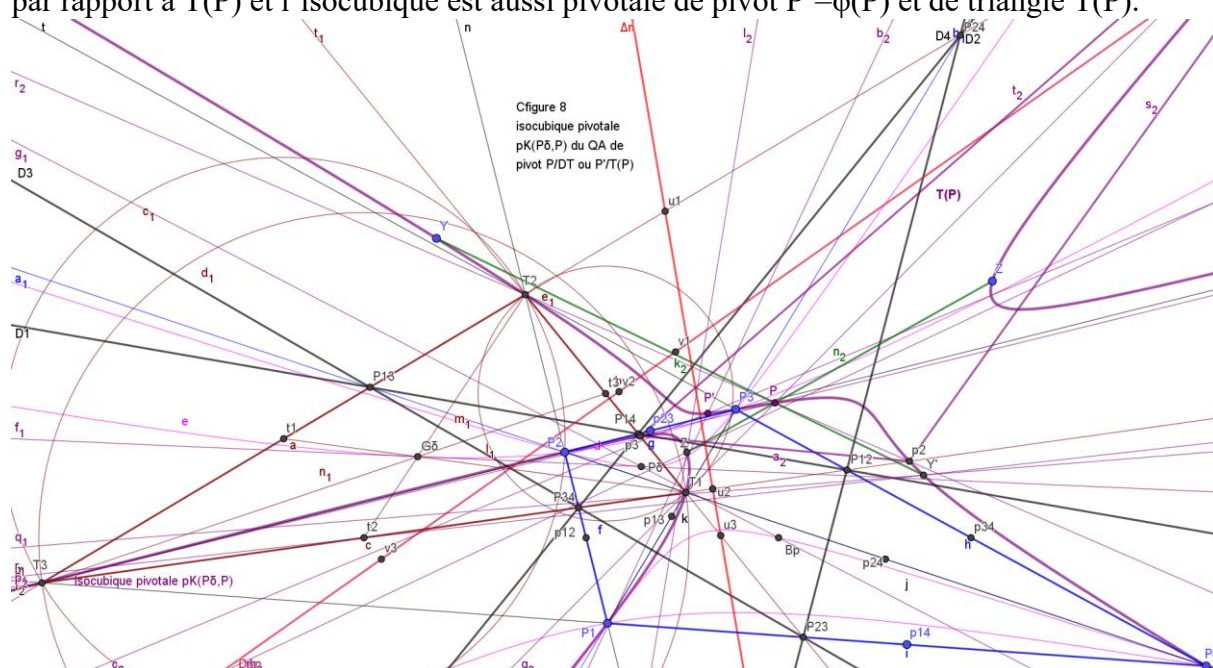
Les 4 cubiques dégénérées formées par un cercle passant par 3 sommets d'un triangle de référence du QC et par la droite passant par les 3 autres sommets passent par les 6 sommets du QC, le point de Miquel M , foyer de la parabole inscrite du QC et les 2 points circulaires, qui constituent un ensemble de 9 points C-B.



B. Isocubiques pivotales du QA et non pivotales du QC

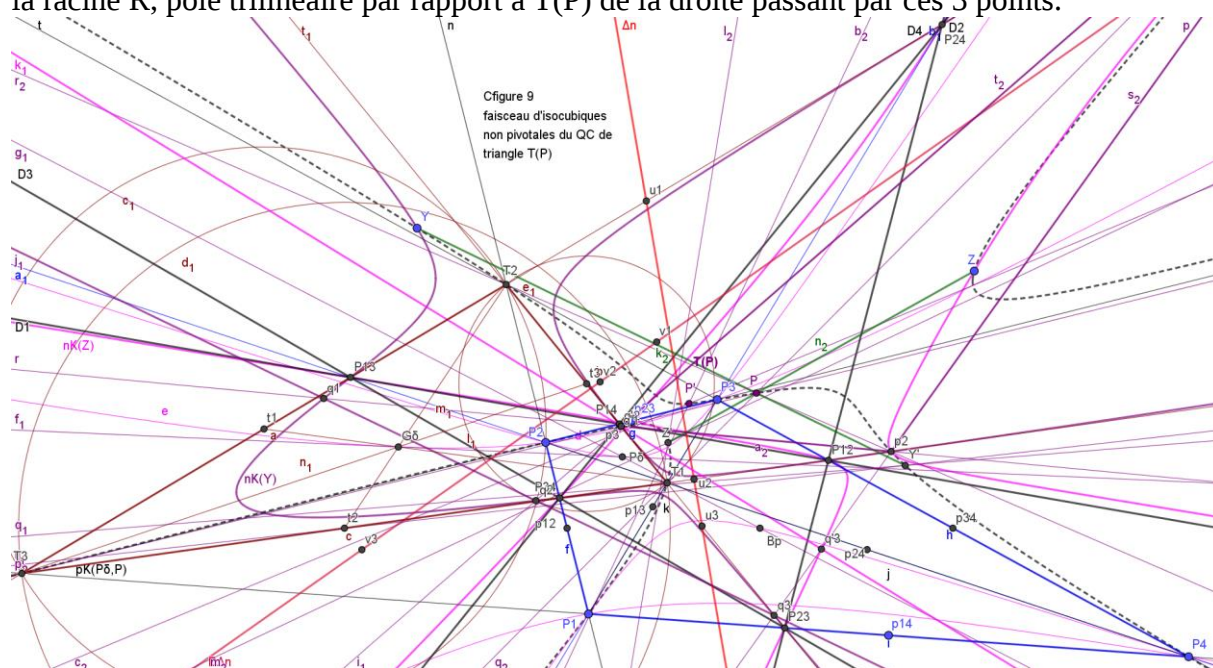
1. Isocubiques pivotales du QA $pK(P\delta, P)$

Les sommets d'un QA sont les points fixes d'une isoconjugaison φ de triangle DT qui associe au centre de gravité $G\delta$ de DT le pôle $P\delta$; pour un point P choisi comme pivot, l'isocubique pivotale $pK(P\delta, P)$ passe par les 4 sommets du QA, les 3 sommets de DT, le pivot P et l'isopivot $P'=\varphi(P)$ ainsi que par les sommets du triangle cévien $T(P)$ par rapport à DT. Le point P et les sommets de DT sont les points fixes d'une seconde isoconjugaison φ' par rapport à $T(P)$ et l'isocubique est aussi pivotale de pivot $P'=\varphi(P)$ et de triangle $T(P)$.



2. Faisceau d'isocubiques non pivotales du QC de triangle $T(P)$

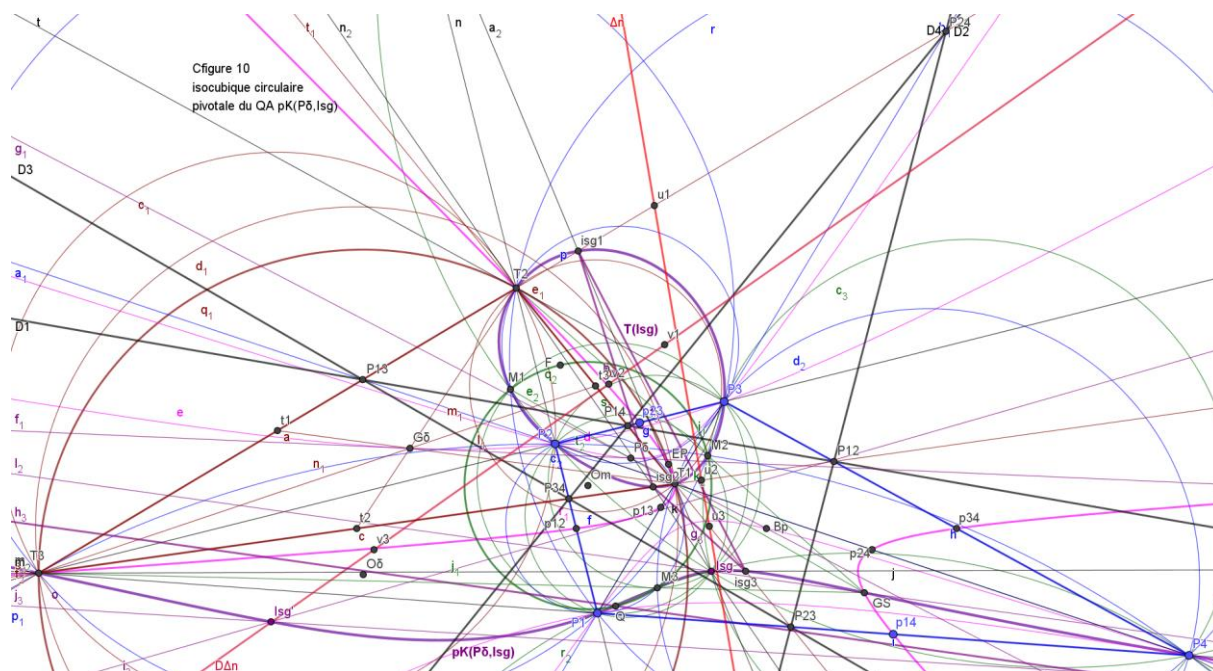
On a vu précédemment que les sommets du QC et les sommets du triangle $T(P)$ cévien d'un point P quelconque par rapport à DT constituent un ensemble de 9 points C-B. Il passe par ces 9 points un faisceau d'isocubiques non pivotales du QC, chacune étant déterminée par un 10^{ème} point. Les côtés du triangle $T(P)$ recoupent la cubique en 3 points alignés et la cubique est une isocubique non pivotale nK définie par le triangle $T(P)$, l'isoconjugaison φ' et la racine R, pôle trilineaire par rapport à $T(P)$ de la droite passant par ces 3 points.



3. Exemples connus

a) isocubique circulaire pivotale du QA $pK(P\delta, Isg)$

L'isocubique circulaire pivotale du QA a pour pivot le point isogonal Isg ; elle passe par les 4 sommets du QA, les 3 sommets de DT, le pivot Isg et l'isopivot $Isg' = \phi(Isg)$ ainsi que par les 3 sommets du triangle cévien $T(Isg)$ par rapport à DT et par les 3 sommets du triangle de Miquel. Son asymptote est parallèle à la droite $IsgGS$ qui passe par le point isogonal Isg et le point de Gergonne-Steiner du QA GS , ces 2 points étant isogonaux par rapport au triangle de Miquel. Cette cubique est isogonale par rapport au triangle de Miquel et pivotale de pivot le point à l'infini de la droite $IsgGS$; elle coupe son asymptote au point Q isogonal du pivot, situé sur le cercle circonscrit au triangle de Miquel et le foyer de la courbe est le point F diamétralement opposé à Q sur ce cercle.

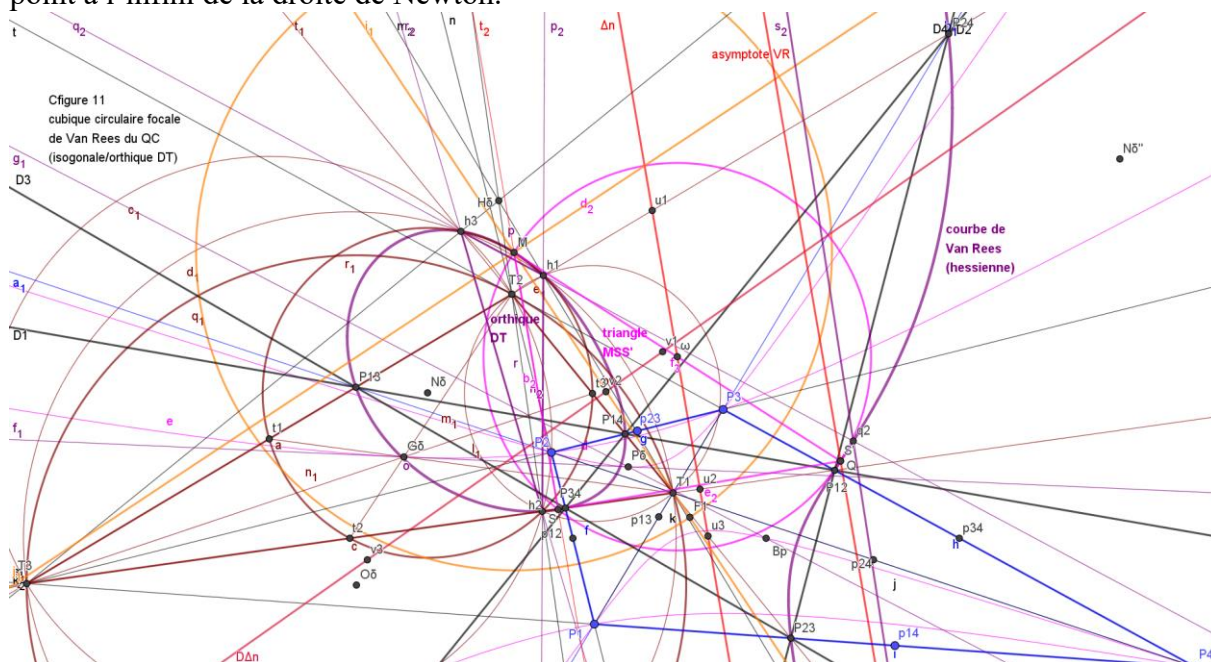


b) cubique isogonale circulaire focale non pivotale de Van Rees du QC

L'isocubique circulaire focale de Van Rees du QC est un cas particulier de l'isocubique pivotale circulaire d'un QA dont 2 côtés opposés sont perpendiculaires ; le pivot est le tangentiel des 4 sommets du QA, le point d'intersection des 2 côtés opposés étant son conjugué ψ et le point d'Euler-Poncelet EP du QA. (Les 4 points sont réels seulement lorsque la courbe est bicursale). Cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites du QC.

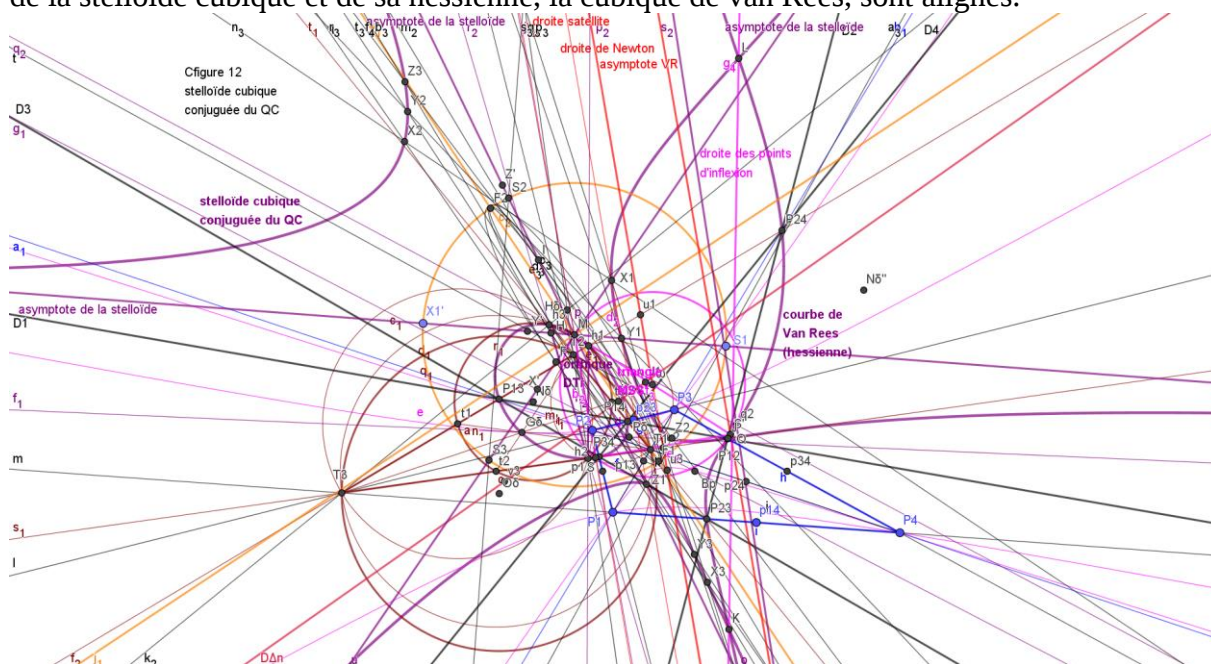
Cette cubique remarquable est isogonale non pivotale par rapport au triangle orthique de DT, cévien de l'orthocentre $H\delta$, la droite passant par les 3 intersections avec les côtés du triangle étant la conjuguée ψ du cercle d'Euler de DT. Elle passe par les 6 sommets du QC, les sommets du triangle orthique de DT et le point M , elle est invariante dans les transformations ϕ des QA décrits ci-dessus et dans la transformation ψ du QC. Tout cercle passant par M recoupe la cubique en 3 points dont les 3 conjugués ψ sont alignés sur une droite conjuguée ψ du cercle ; les 6 points forment un QC inscrit dans la courbe, qui est isogonale par rapport au triangle (elle est en particulier isogonale par rapport aux 4 triangles de référence de tous les QC inscrits et par rapport aux triangles orthiques de leurs DT).

Dans sa version bicursale, ici présentée, la courbe coupe son asymptote en un point Q et le cercle de diamètre MQ coupe la courbe en 2 points S et S' symétriques par rapport à la droite de Newton ; la courbe est isogonale par rapport au triangle MSS' et pivotale de pivot le point à l'infini de la droite de Newton.



c) Stelloïde cubique conjuguée du QC

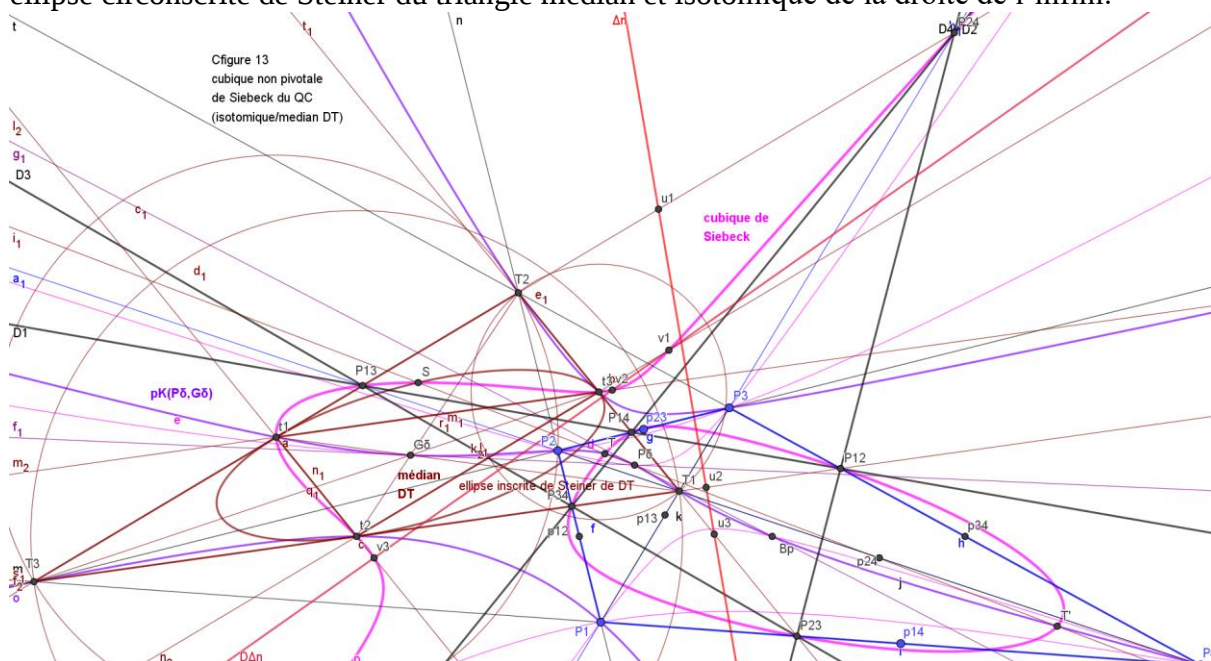
On peut construire la stelloïde cubique conjuguée du QC en utilisant plusieurs propriétés connues : les asymptotes sont les trisectrices de l'angle entre le 1^{er} axe de Steiner et la parallèle par M à la droite de Newton (axe de la parabole), la courbe recoupe ses asymptotes en 3 points X1, X2 et X3 alignés sur la droite satellite de la droite de l'infini, parallèle à la droite de Newton s'en déduisant dans une homothétie de centre M et de rapport 2/3 et chacun de ces 3 points en détermine 2 autres, qui sont ses « symétriques » par rapport aux points F1 et F2, çàd que les triangles X1X2X3, Y1Y2Y3 et Z1Z2Z3 ont les mêmes foyers F1 et F2 de l'ellipse inscrite de Steiner (cf infra théorème de Marden). Les points d'inflexion de la stelloïde cubique et de sa hessienne, la cubique de van Rees, sont alignés.



d) cubique isotomique non pivotale de Siebeck du QC

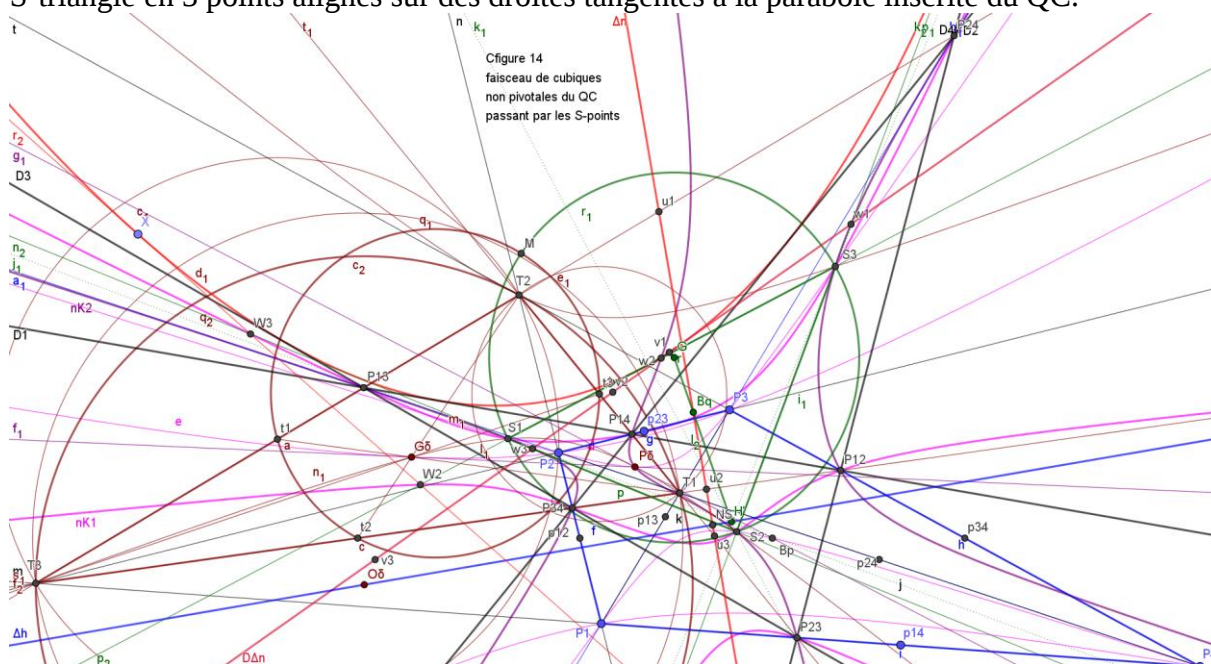
On nomme ainsi la cubique non pivotale du QC isotomique par rapport au triangle médian de DT, cévien du centre de gravité $G\delta$, la droite passant par les 3 intersections avec les côtés de ce triangle étant la droite duale du centre de gravité Bp du QA, droite de Newton du QC diagonal, formé par les 3 diagonales et la droite de Newton du QC.

Cette cubique coupe la cubique pivotale isotomique par rapport au triangle médian de DT $pK(P\delta, G\delta)$ en 9 points C-B, les 3 sommets de ce triangle et 3 couples de points isotomiques par rapport à ce triangle et alignés avec $P\delta$; ces 3 droites par $P\delta$ recouperont la cubique non pivotale de Siebeck en 3 points situés sur l'ellipse inscrite de Steiner de DT ou ellipse circonscrite de Steiner du triangle médian et isotomique de la droite de l'infini.



e) isocubique non pivotale du QC passant par les S-points

On a vu précédemment que les 6 sommets du QC et les 3 S-points forment un ensemble de 9 points C-B. Il passe par ces 9 points un faisceau d'isocubiques non pivotales du QC, chacune étant déterminée par un 10^{ème} point. Toutes ces cubiques recouperont les côtés du S-triangle en 3 points alignés sur des droites tangentes à la parabole inscrite du QC.



f) cubique quasi-isogonale du QA et isocubique pivotale associée

Pour un point quelconque du plan, on trace les symétriques par rapport à 2 côtés opposés du QA et les médiatrices des 3 segments joignant ces 3 couples de points.

Le lieu des points pour lesquels ces 3 médiatrices sont concourantes est la cubique quasi-isogonale du QA ; elle passe par les 3 sommets de DT (mais pas par ceux du QA) et par les points EP, Isg et Isg' du QA.

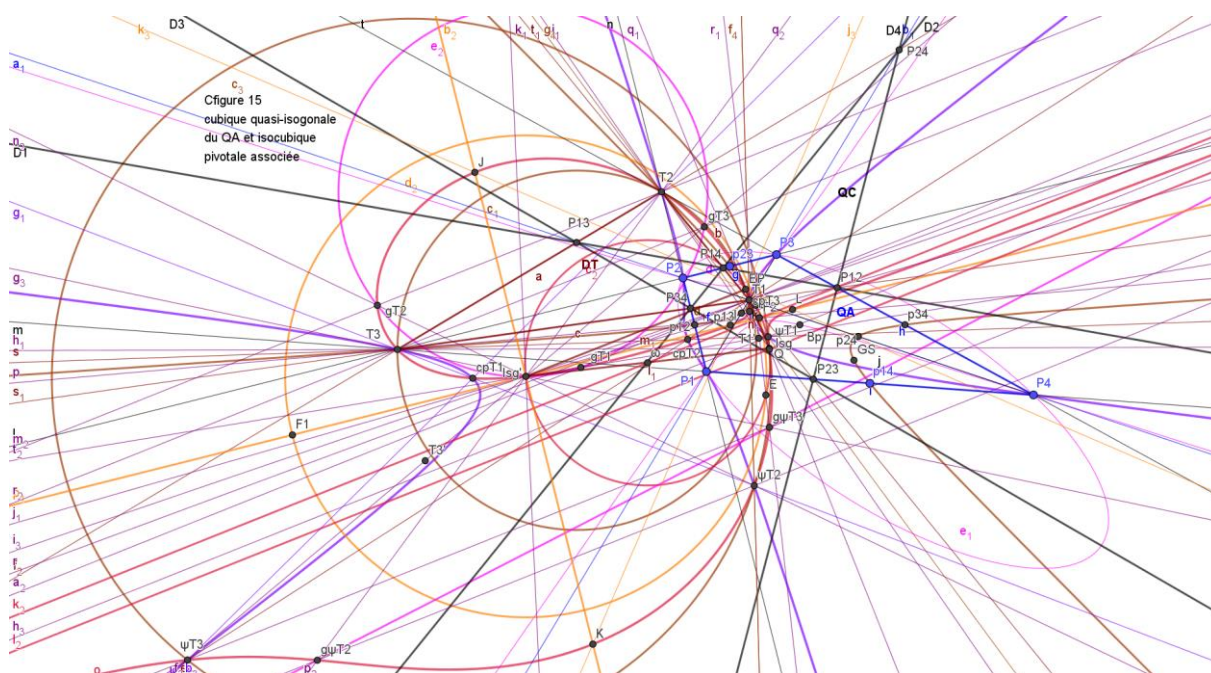
Cette cubique est une courbe de Van Rees bicursale, indépendante dans

- la transformation ϕ de triangle DT qui échange Isg et Isg'
- la transformation ψ de centre Isg' qui échange EP et Isg
(la droite de Newton est la médiatrice de EPIsg et l'asymptote est la parallèle à cette droite passant par le point Q diamétralement opposé à Isg' sur le cercle circonscrit à EP, Isg et Isg')
- la transformation ϕ' de triangle celui des transformés ψ des sommets de DT qui échange EP et Isg'
- l'isogonalité par rapport au triangle EPIsgIsg' ; la courbe est alors pivotale, le pivot étant le point à l'infini de la médiatrice du segment EPIsg et l'isopivot le point Q
- du coup, elle est aussi pivotale par rapport au triangle cévien du point à l'infini de la médiatrice de EPIsg par rapport au triangle EPIsgIsg', le pivot étant alors le point Q

Cette courbe passe par les sommets EP, Isg et Isg' du triangle EPIsgIsg' et par leurs centres des cercles inscrit I et exinscrits J, K et L. Elle passe par les sommets Ti de DT, leurs transformés ψTi et les conjugués isogonaux gTi et $g\psi Ti$ ainsi que par les points appelés cpTi et définis comme intersections des segments $Tj\psi Tk$ et $Tk\psi Tj$ ou comme transformés ϕ des points ψTi ou ϕ' des points Ti.

Les points Ti, ψTi et cpTi constituent un ensemble de 9 points C-B, par lesquels passe un faisceau de cubiques ; l'une d'elles est particulièrement intéressante, elle est indépendante dans les mêmes transformations ϕ et ϕ' par rapport aux triangles formés par les sommets de DT et leurs conjugués ψ et dans l'isogonalité par rapport au triangle formé par les points cpTi et passe par leurs points fixes, les 4 sommets du QA et leurs isogonaux ainsi que les centres des cercles inscrit et exinscrits du triangle formé par les points cpTi.

(Bien sûr, on aurait la même construction à partir des points gTi et $g\psi Ti$...)



C. Théorème de Marden et généralisation de Siebeck

1. Théorème de Marden et foyers de l'ellipse inscrite de Steiner

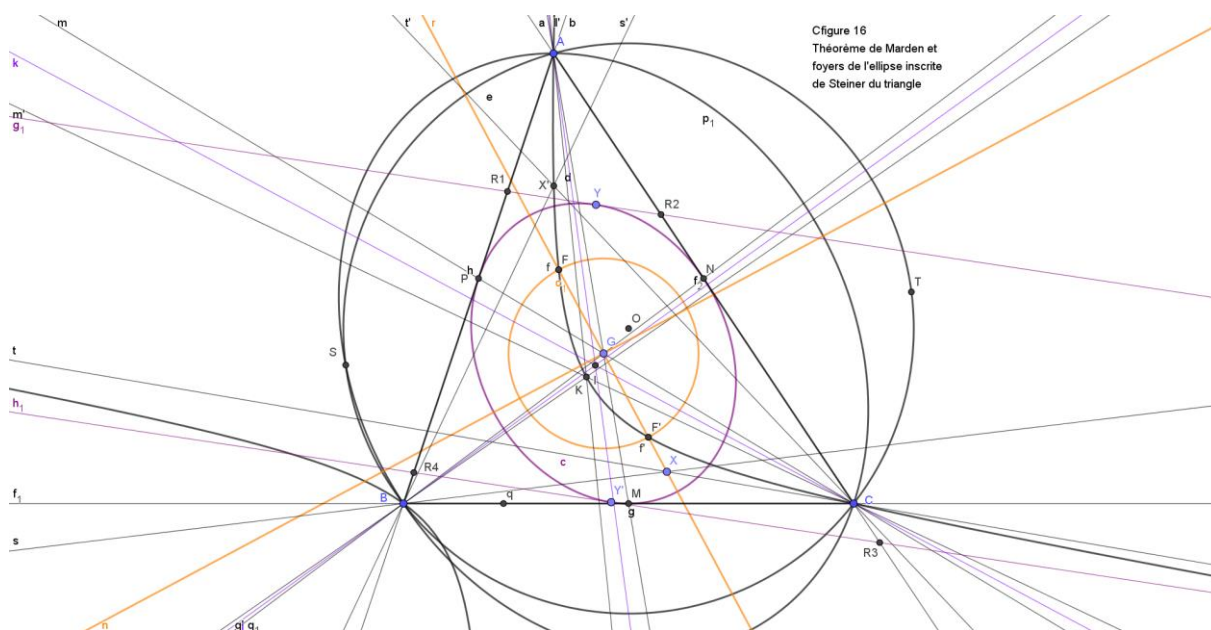
Il existe, dans chaque triangle de sommets A, B et C, une ellipse inscrite de Steiner tangente aux 3 côtés en leur milieu ; elle est centrée au centre de gravité G et passe par les milieux des segments GA, GB et GC joignant les sommets au centre de gravité.

Dans le plan complexe d'origine G, les coordonnées des sommets A, B et C étant z_A , z_B et z_C , on forme le polynôme $(z-z_A)(z-z_B)(z-z_C)$; les coordonnées des 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner F et F' sont les zéros du polynôme dérivé $3z^2 + zAzB + zAzB + zBzC$.

Si l'on mène d'un point quelconque du plan les 2 tangentes à cette ellipse, les bissectrices de l'angle formé par ces 2 tangentes sont les mêmes que celle de l'angle formé par les 2 droites joignant le point aux 2 foyers ; appliquée aux 3 sommets, cette propriété définit l'isogonalité, qui s'étend aux foyers de toutes les coniques inscrites du triangle.

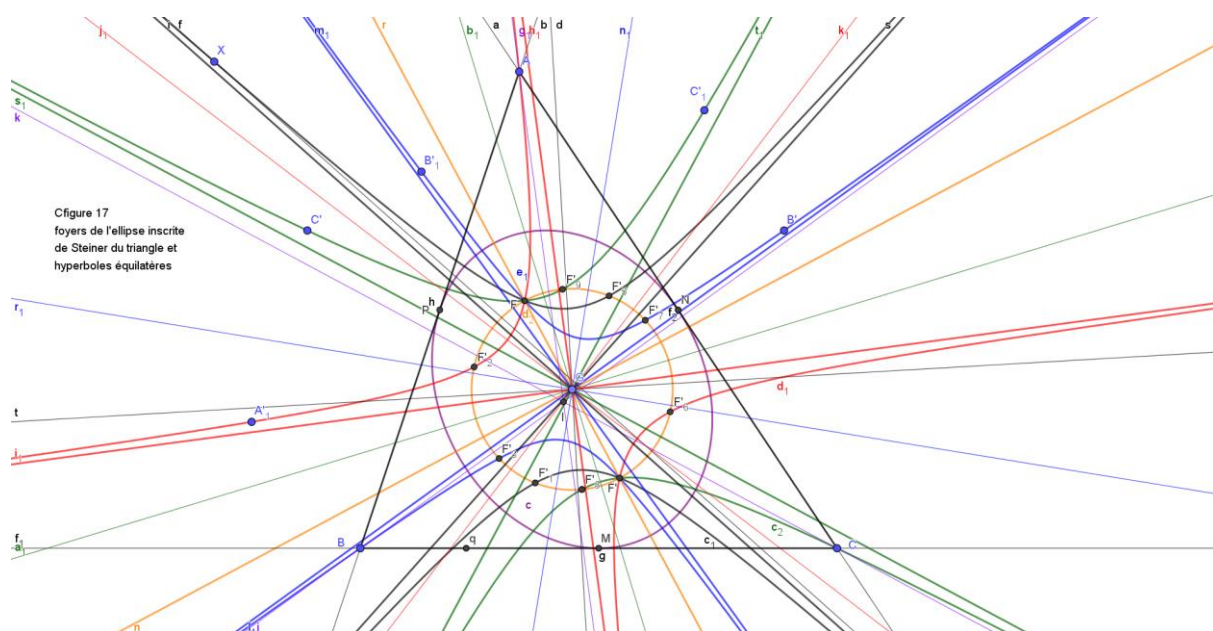
Ces 2 points F et F' sont les points fixes de la transformation ψ du triangle qui échange les points de Fermat ainsi que les points isodynamiques et la droite FF' est la droite des moindres carrés du triangle ; c'est la bissectrice des angles OGT et SGK, où O est le centre du cercle circonscrit, S le point de Steiner, 4^{ème} intersection du cercle circonscrit et de l'ellipse circonscrite de Steiner, T le point de Tarry, point diamétralement opposé à S sur le cercle circonscrit et K le point de Lemoine, conjugué isogonal de G. On peut alors construire les points F et F' comme intersection de cette droite et de la conique circonscrite qui est sa conjuguée isogonale et passe donc par K.

Les tangentes en 2 points de l'ellipse symétriques par rapport au centre de gravité sont parallèles. Tout couple de tangentes parallèles recoupe 2 tangentes issues d'un point quelconque X en 4 points R1, R2, S1 et S2. En choisissant ces 4 points 2 à 2 de sorte qu'il y ait un point sur chaque droite de chacun des 2 groupes, le produit des distances du point X aux 2 intersections est égal au produit des distances du point X aux 2 foyers. En particulier, si l'on prend un côté BC du triangle comme tangente, la tangente parallèle passe par le milieu de GA, situé au tiers de la médiane à partir du sommet et on a $AB.AC = 3 AF.AF'$.



Un point quelconque X du plan et son symétrique X' par rapport à G déterminent avec F et F' une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux bissectrices de l'angle $\angle FXF'$. Les segments FF' et XX' se coupent en leur milieu G et les points F et F' et X et X' constituent 2 couples de pivots de l'hyperbole équilatère. On note que les 2 points F et F' sont les 2 seuls points dont le symétrique par rapport à G coïncide avec son conjugué isogonal.

Cette propriété est vraie en particulier pour les sommets A , B et C du triangle et les points F et F' sont les intersections des 3 hyperboles équilatères centrées en G , passant respectivement par A et A' , B et B' et C et C' et d'asymptotes parallèles aux bissectrices en chaque sommet correspondant.



2. Théorème de Siebeck et foyers des courbes de classe n

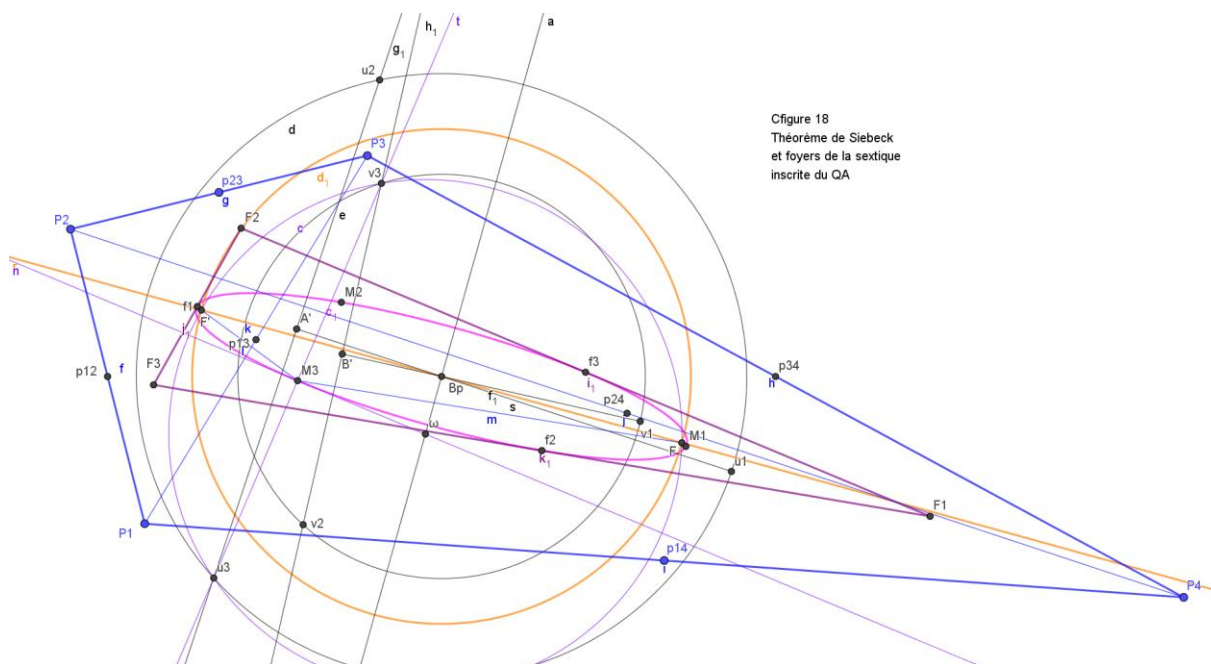
Ces propriétés s'appliquent en réalité de manière beaucoup plus générale à toutes les courbes de classe n et à leurs n foyers (l'article de Jörg Siebeck mentionné en bibliographie est paru 80 ans avant l'énoncé du théorème de Marden).

Si l'on mène d'un point quelconque X les n tangentes à la courbe, la direction moyenne de ces n droites est la même que celle des n droites joignant le point aux n foyers.

Si l'on mène par un point à l'infini n tangentes parallèles à la courbe, elles coupent les n tangentes issues d'un point quelconque X en n^2 points. En choisissant ces points n par n de sorte qu'il y ait un point sur chacune des n droites de chacun des 2 groupes, le produit des distances du point quelconque X aux n intersections est toujours le même et égal au produit des distances du point X aux n foyers.

Pour tout ensemble de n points P_i , il existe une courbe de classe $n-1$ tangente à chacun des $\frac{1}{2} n(n-1)$ segments joignant les n points 2 à 2 en leur milieu. Les foyers de cette courbe sont les $n-1$ points de coordonnées complexes les racines du polynôme dérivé du polynôme $(z-z_1)(z-z_2) \dots (z-z_n)$ où les z_i sont les coordonnées complexes des points P_i .

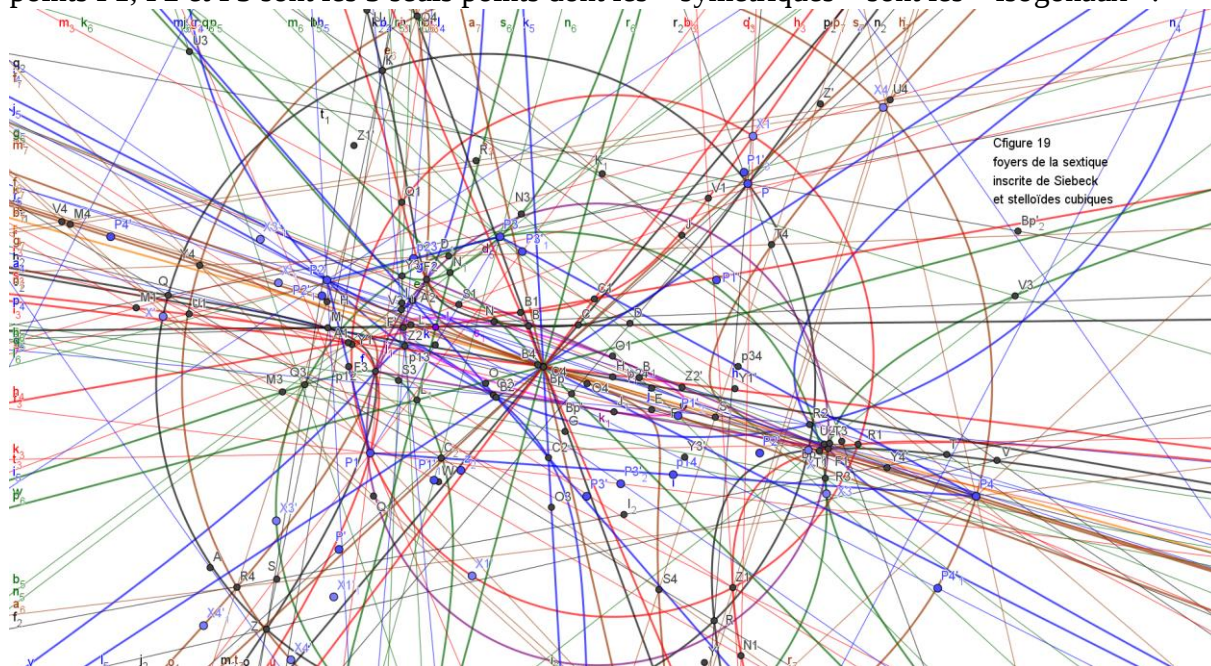
Pour le QA de sommets P_i , les foyers de la courbe de Siebeck sont F_1 , F_2 et F_3 et les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle $F_1F_2F_3$ sont F et F' . Le point B_p est le milieu de FF' et le centre de gravité du triangle $F_1F_2F_3$ et du QA $P_1P_2P_3P_4$ et la droite FF' est la droite des moindres carrés du triangle et du QA. On a, pour chaque sommet P_i , $P_iP_j.P_iP_k.P_iP_l = 4 P_iF_1.P_iF_2.P_iF_3$; p_{ij} étant les milieux des côtés P_iP_j , on a de plus, $p_{ij}p_{kl}.p_{ik}p_{jl}.p_{il}.p_{jk} = 8 B_{ppij}.B_{ppik}.B_{ppil} = 4 B_pF_1.B_pF_2.B_pF_3$.



Un point quelconque P du plan détermine 2 points Q et R « symétriques » par rapport au segment FF' , tels que le triangle des 3 points ait les mêmes 2 points F et F' comme foyers de son ellipse inscrite de Steiner. Le point P détermine avec le triangle $F_1F_2F_3$ des foyers de la courbe inscrite de Siebeck une stelloïde cubique dont les asymptotes sont parallèles aux trisectrices des directions des droites joignant le point aux 3 foyers F_1 , F_2 et F_3 .

Ceci est vrai en particulier pour les 4 sommets du QA et les 3 points F_1 , F_2 et F_3 sont les intersections des 4 stelloïdes cubiques passant par les sommets et leurs « symétriques » et d'asymptotes les trisectrices en ces sommets des 3 côtés du QA passant par ce sommet.

Par ailleurs, tout point du plan détermine 2 points « isogonaux » tels que pour chaque sommet du QA les trisectrices des 3 directions des droites joignant ce sommet aux 3 points soient les mêmes que celles des trisectrices des 3 directions de droites joignant ce sommet aux 3 foyers F_1 , F_2 et F_3 et donc les mêmes que les trisectrices en ces sommets des 3 côtés du QA passant par ce sommet. Les 3 points sont alors les foyers d'une courbe de Siebeck tangente aux 6 côtés du QA et duale d'une cubique passant par les 6 sommets du QC. On note que les points F_1 , F_2 et F_3 sont les 3 seuls points dont les « symétriques » sont les « isogonaux ».



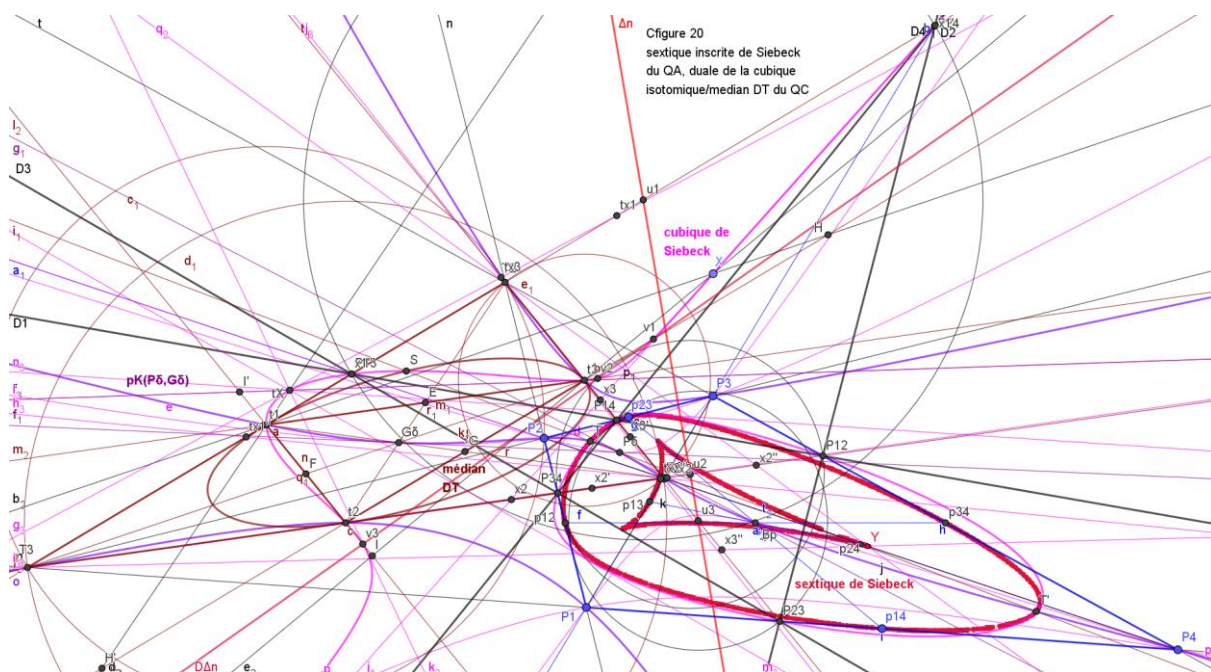
3. Application au QA et sextique inscrite de Siebeck

On s'intéresse ici à la construction pour un QA de la courbe de Siebeck, tangente aux 6 côtés en leur milieu ; on vient de voir comment construire ses foyers.

On appelle cette courbe par commodité la sextique inscrite de Siebeck ; elle est de classe 3 et sa duale est la cubique de Siebeck décrite ci-dessus (voir C3d). On trace la sextique comme lieu des points duaux des tangentes à la cubique ; ses tangentes sont les droites duales des points de la cubique.

Cette courbe étant tangente aux 6 côtés du QA en leur milieu, la cubique passe comme on l'a vu par les 6 sommets du QC ; elle est tangente aux droites duales des 6 milieux. La sextique est aussi tangente aux 3 segments $p_1p_2p_3$ joignant ces milieux 2 à 2 ; ces segments se coupent en leur milieu B_p , centre de gravité du QA. Les 3 droites qui portent ces milieux passent par les sommets du triangle médian de DT et leurs points duaux sont les points d'intersection de la droite duale de B_p avec la cubique ; cette droite est la droite de Newton du QC diagonal et ces points sont les milieux v_1 , v_2 et v_3 des segments T_1u_1 , T_2u_2 et T_3u_3 , où T_1 , T_2 et T_3 sont les sommets de DT et u_1 , u_2 et u_3 les milieux de $P_{12}P_{34}$, $P_{13}P_{24}$ et $P_{14}P_{23}$, alignés sur la droite de Newton du QC.

La cubique et la sextique sont tangentes aux 6 points d'intersection autres que les sommets du triangle médian de DT des 2 cubiques $pK(P\delta, G\delta)$ et de Siebeck ; ces points déjà mentionnés sont 2 à 2 isotomiques par rapport à ce triangle. La droite duale de chacun de ces 2 points est la tangente aux 2 courbes en l'autre point et ces 2 droites sont parallèles.



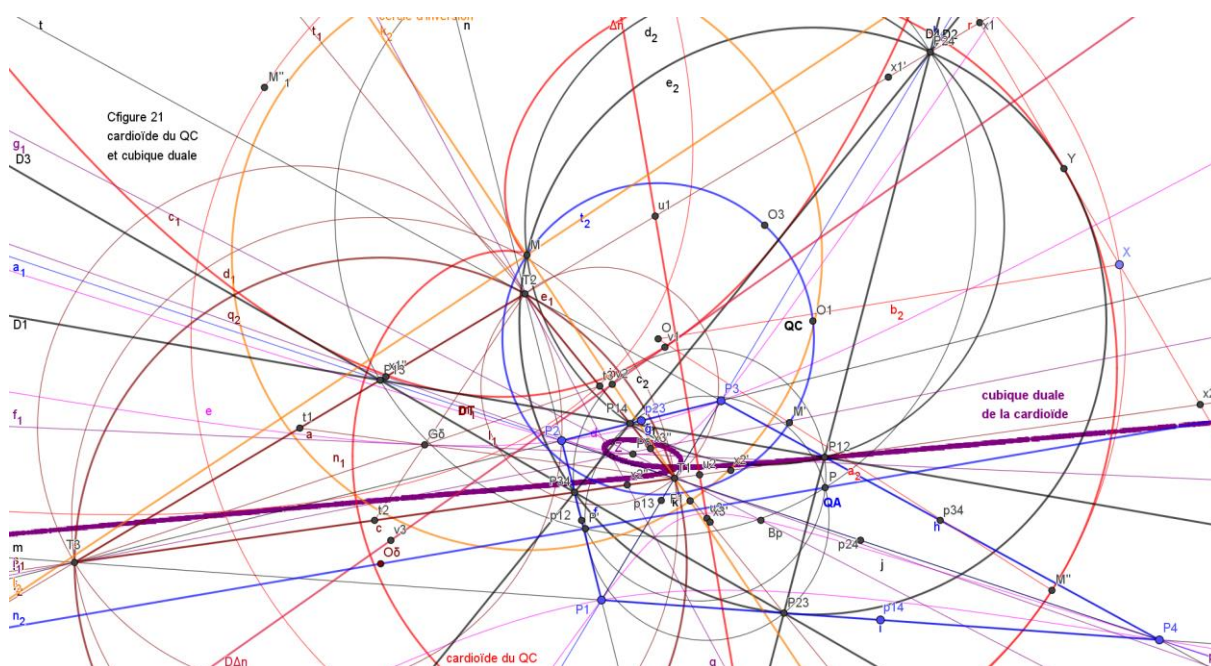
D. Courbes de classe 3 du QC et cubiques duales

4. Cardioïde et cubique duale

La cardioïde du QC, tangente aux 4 cercles circonscrits aux 4 triangles de référence, est la conjuguée ψ de la parabole inscrite du QC ; elle a pour centre le point O, centre du cercle de Miquel et pour point de rebroussement le point M, foyer de la parabole.

Elle peut être décrite comme l'enveloppe des droites joignant 2 points du cercle directeur de centre O et de rayon triple du cercle de Miquel, les 2 points décrivant ce cercle dans le même sens, l'un à une vitesse double de celle de l'autre.

La cardioïde est une quartique de classe 3 et sa cubique duale est le lieu des points duaux de ses tangentes décrites ci-dessus.

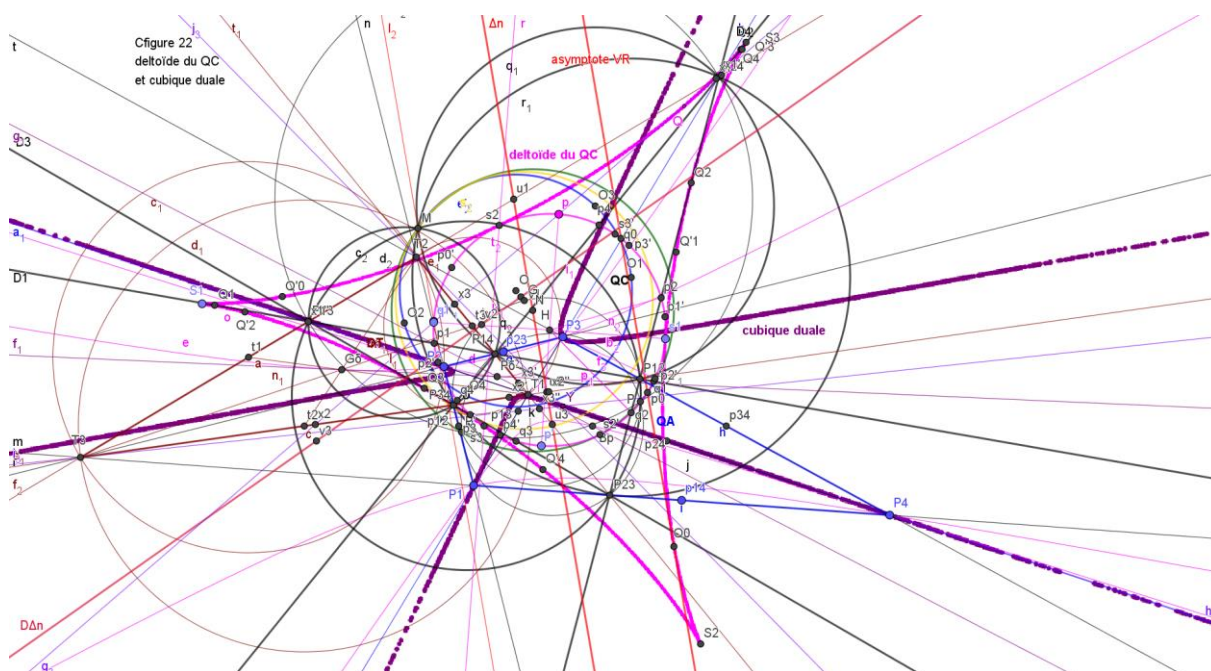


5. Deltoïde et cubique duale

La deltoïde du QC est tangente aux 4 droites du QC et à l'asymptote de la courbe circulaire focale de Van Rees ; elle a pour cercle intérieur le cercle de Hervey de centre H, point de Kantor-Hervey et de rayon égal à celui du cercle de Miquel.

Elle peut être décrite comme l'enveloppe des droites joignant 2 points du cercle de Hervey, décrivant ce cercle en sens inverse, l'un à une vitesse double de celle de l'autre.

La deltoïde est une quartique de classe 3 et sa cubique duale est le lieu des points duaux de ses tangentes décrites ci-dessus ; elle passe par les 4 sommets du QA.

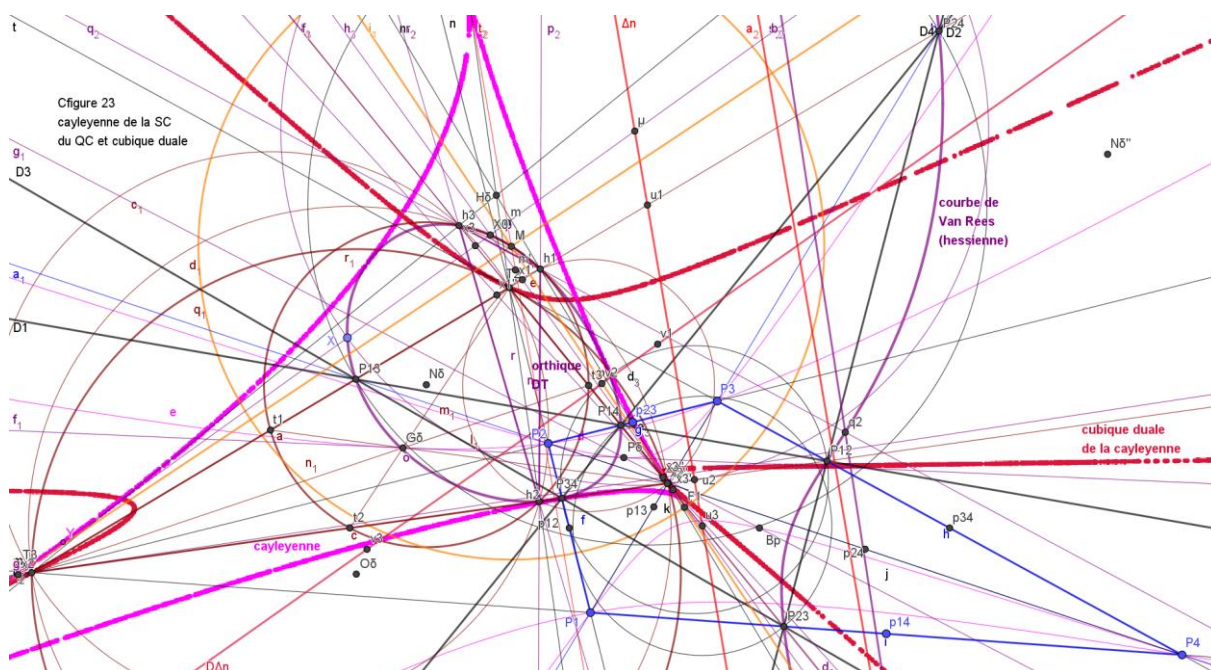


6. Cayleyenne et cubique duale

La cayleyenne de la stelloïde cubique conjuguée du QC est l'enveloppe des droites passant par 2 points conjugués ψ de la hessienne de Van Rees. Cette courbe est une sextique de classe 3 et ses 3 foyers sont les 2 points fixes F et F' de la transformation ψ et le point à l'infini de la droite de Steiner ou droite des orthocentres Δh perpendiculaire à la droite de Newton Δn .

La cubique duale de cette courbe est le lieu des points duaux de ses tangentes décrites ci-dessus ; elle passe par les 3 sommets de DT.

Lorsque X décrit la hessienne de Van Rees, son conjugué ψX décrit la même courbe, la cayleyenne enveloppe les droites XX' et le point courant de cette courbe est le conjugué harmonique par rapport à X et X' de la 3^{ème} intersection XO de XX' avec la hessienne.



Que sont les figures duales de la droite passant par 2 points ou du point situé à l'intersection de 2 droites pour la figure autoduale du triangle avec ses 3 sommets et ses 3 côtés ?

Un objet de dérision ou une honte douloureuse.

Et bien, c'est exactement ce que doit être le triangle pour l'ensemble formé par les 2 figures duales du quadrangle complet de 4 points et du quadrilatère complet de 4 droites ayant le même triangle diagonal : un objet de dérision ou une honte douloureuse.

Librement adapté de Friedrich Wilhelm Nietzsche Also sprach Zarathoustra (*)

(*) Was ist der Affe für den Menschen ? Ein Gelächter oder eine schmerzliche Scham.

Und ebendas soll der Mensch für den Übermenschen sein : ein Gelächter oder eine schmerzliche Scham.