

Bernard Keizer
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Le Buy (Dordogne 24), septembre 2013

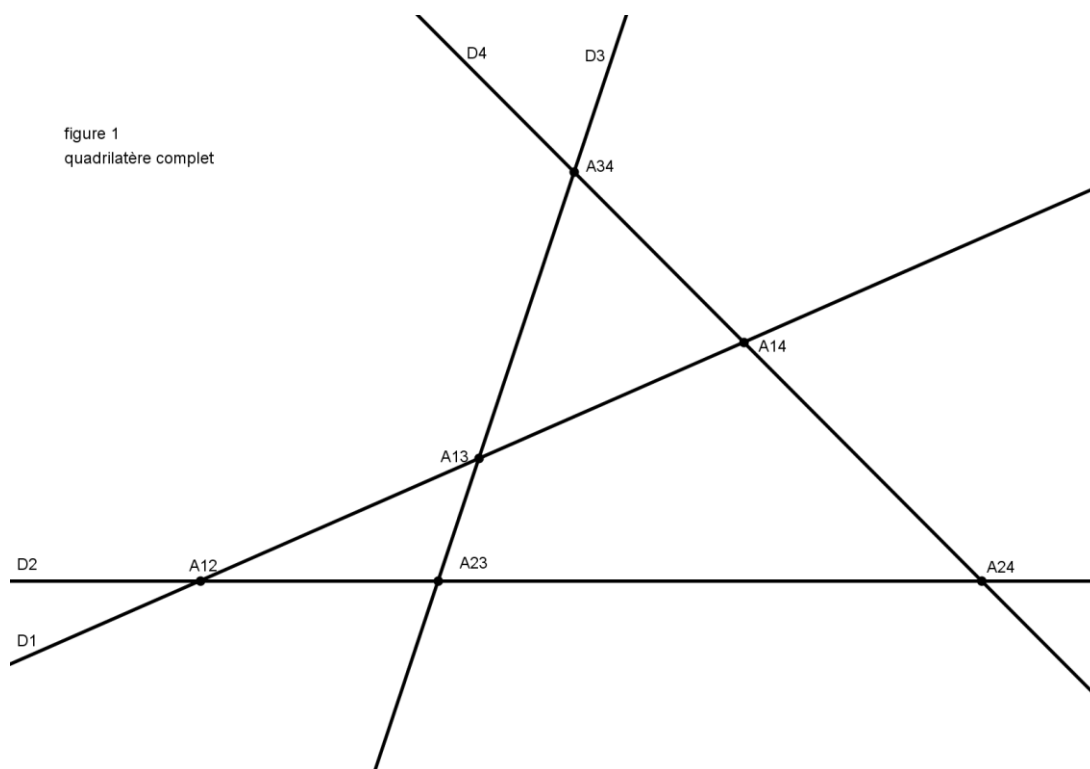
La Géométrie du Quadrilatère Complet (*) (points, droites, triangles, cercles et courbes remarquables) (version 2013)

Résumé

L'article présente les principales propriétés du quadrilatère complet et décrit les éléments remarquables de cette figure : points (Miquel, Kantor-Hervey, Morley, Plücker ...), droites (Newton, Steiner, Euler ...), triangles (premier et second diagonal ...), cercles (Miquel, Hervey, Plücker, Dimidium ...), coniques (parabole ...), cubiques (cubique de Eckart des 27 centres de cardioïdes et cubique circulaire focale de Van Rees ...) et même quartiques (deltoïde de Kantor-Hervey et cardioïdes de Morley ...) en utilisant autant que possible les notations de Encyclopedia of Quadrifigures de Chris van Tienhoven.

Abstract

The article presents the main properties of the complete quadrilateral and describes the remarkable elements of this figure : points (Miquel, Kantor-Hervey, Morley, Plücker ...), lines (Newton, Steiner, Euler ...), triangles (first and second diagonal triangle ...), circles (Miquel, Hervey, Plücker, Dimidium ...), conics (parabola ...), cubics (Eckart's cubic of the 27 centers of cardioids and Van Rees focal circular cubic ...) and even quartics (Kantor-Hervey's deltoïd and Morley's cardioids ...) by using as much as possible the notations of Encyclopedia of Quadrifigures by Chris van Tienhoven.



(*) Titre choisi par référence à La Géométrie du Triangle de Trajan Lalesco (35)

Sommaire

- Préface
- Remerciements et avertissement
- A) Définition et propriétés traditionnelles du QC
- B) Point de Kantor-Hervey
- C) Orthocentre du QI des 4 O_i
- D) Courbes remarquables (parabole, deltoïde et cardioïde)
- E) Parabole tangente aux 4 droites D_i et parabole associée
- F) Deltoïde tangente aux 4 droites D_i
- G) Cardioïde tangente aux 4 cercles C_i
- H) Triangles de Morley
- I) Cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i
- J) Coordonnées cartésiennes
- K) Coordonnées barycentriques et faisceaux de coniques
- L) Cubique circulaire focale de Van Rees
- M) Coordonnées trilinéaires
- N) Coordonnées complexes et géométrie inversive
- Résumé et remarques
- Tableau des éléments remarquables et des transformations
- Bibliographie

Figures

- Figure 1 Quadrilatère complet
- Figures 1bis et 1ter 3 QA du QC et 3 QC du QA
- Figure 2 Point et cercle de Miquel
- Figure 3 Droites de Steiner et de Newton
- Figure 4 Centres des cercles inscrits et exinscrits
- Figure 4bis Ensemble de 16 points associés
- Figure 5 Triangles diagonaux
- Figure 6 Points de Morley et de Kantor-Hervey
- Figure 2bis Transformation de Clawson-Schmidt
- Figure 7 Orthocentre du QI des O_i
- Figure 8 Parabole, deltoïde et cardioïde
- Figure 9 Parabole tangente aux 4 droites D_i
- Figure 9bis Parabole associée
- Figure 10 Deltoïde tangente aux 4 droites D_i
- Figure 11 Cardioïde tangente aux 4 cercles C_i
- Figure 11bis Tangentes Δ_i communes aux 4 C_i et à la cardioïde
- Figure 12 Triangles de Morley
- Figure 12bis Centres des 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i
- Figure 13 Cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i
- Figure 14 Conique de Serret
- Figure 15 Faisceaux de coniques du quadrilatère complet
- Figure 15bis Faisceau de coniques du quadrangle
- Figure 15ter 7 quadrilatères complets des 3 quadripoints
- Figure 16 Cubique circulaire focale de Van Rees
- Figure 16bis QC principal de la cubique de Van Rees

Ces figures ont été réalisées avec Géogébra version 4.2

Foreword

A few months ago I received an e-mail from a Frenchman.

He asked me to help him explore some special Curves in a Complete Quadrilateral.

I was pleasantly surprised because I just had finished a project in which I had catalogued all kinds of points and figures relating to Quadrangles and Quadrilaterals.

I had noticed that there was no general description of points, lines, curves, transformations explicitly relating to 4 points and/or 4 lines. I also had noticed that there is a huge difference between figures relating to 4 points and figures relating to 4 lines. To make it even more difficult, it is also important whether the points or lines are ordered or not.

So I did set up 3 different categories of Quadri-Figures:

One for 4 lines without restrictions (Quadrilaterals), one for 4 points without restrictions (Quadrangles) and one hybrid form for 4 points connected by 4 lines in a fixed order (Quadrigon).

I noticed that the calculations for these categories had to be different too.

By systemically applying these principles a beautiful landscape unrolled.

After one and a half years of hard work, tremendously helped by Eckart Schmidt who painstakingly checked all items, the Encyclopedia of Quadri-Figures was released on internet. Hardly recovered from these efforts I received this email. It was Bernard Keizer who contacted me.

And it appeared that he dared to specialize. He chose to work with a system of 4 lines without restrictions, also called a Complete Quadrilateral.

I was enthusiastic about his choice. Not many people explore this subject. This could enrich the Encyclopedia of Quadri-Figures.

Then he limited himself to 2 weird curves, a Deltoid and a Cardioid. I held my breath, this could be very complicated. And I was right. It took a lot of study. I introduced Bernard to the Yahoo Discussion Group for Quadri-Figures. And very soon his question became the most elaborated item of all. Behind its complicated façade lies a simple structure. Moreover it is rich in history (Frank Morley) and rich in beauty. Everything a mathematician could wish occurred. After intensive calculations simple formulas and relations popped up and beautiful pictures were a pleasant bonus. Last but not least a beautiful Cubic found by Eckart Schmidt brought it all together.

At first of course Bernard had a lot to explain. Later on the Quadri-Figures Group could contribute with some new results.

Hardly recovered from these elaborations Bernard surprised me with his document “La Géométrie du Quadrilatère Complet”. It is a remarkable and detailed study in Quadrilateral Geometry of basic subjects as well as advanced subjects. It is not restricted to Cardioids and Deltoids, but it also explains the foundations of Quadrilateral Geometry. It is a unique study and I am sure it will find its way in Quadrilateral Literature.

Chris van Tienhoven

Author Encyclopedia of Quadri-Figures

Remerciements

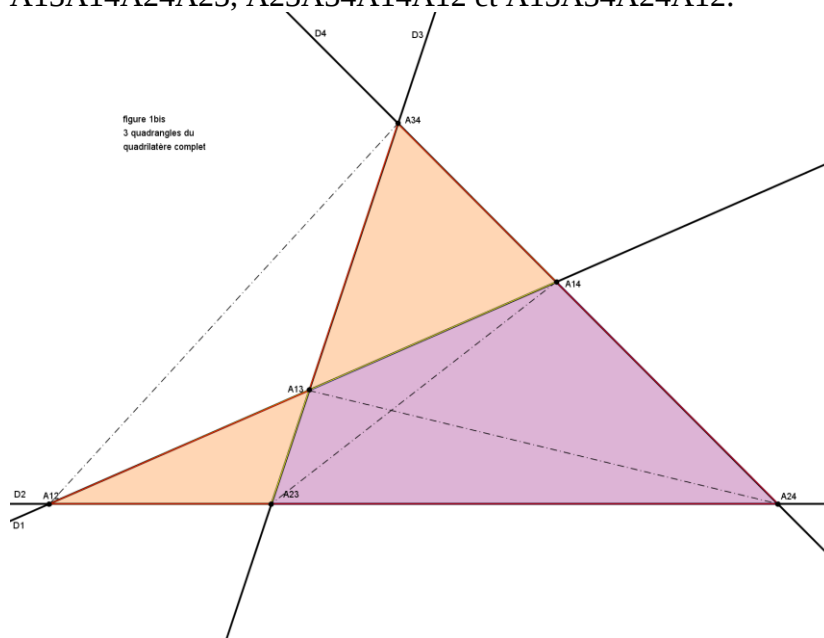
- Le théorème des médiatrices d'Euler des 4 triangles constitués par 4 droites tangentes à une deltoïde avait été étudié de manière analytique durant ses études par Francis Gaspalou ; 50 ans plus tard, il lançait un avis de recherche dans la rubrique des problèmes de la Jaune et la Rouge, tenue par Jean Moreau de Saint Martin, repris ensuite dans celle de la revue Quadrature (32). Denis Fournier, Jean-Nicolas Pasquay et moi-même avons alors commencé à nous intéresser à notre tour au QC et nos échanges durant toutes ces années ont été très riches. Que tous les 4 soient ici chaleureusement remerciés pour les plaisirs trouvés à ces recherches.
- Je voudrais aussi remercier J. P. Ehrmann et J.L. Aymé pour leurs explications ; j'ai découvert grâce à Jean-Louis le site Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF de Chris van Tienhoven, qui est au QC ce que le site Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC de Clark Kimberling est au triangle : deux extraordinaires mines de renseignements ! Je fournirai, aussi souvent que possible, les références EQF.
- J'ai surtout pu entamer avec Chris lui-même, Eckart Schmidt et le groupe de travail Quadrifigures, qui est l'équivalent pour le QC du groupe Hyacinthos, devenu Anopolis, pour le triangle, un échange fructueux qui a notamment permis d'identifier la cubique de Eckart, lieu des centres des 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites Di. Je leur dois aussi un certain nombre de découvertes personnelles sur le QC, qui n'a apparemment pas encore livré tous ses mystères.

Avertissement

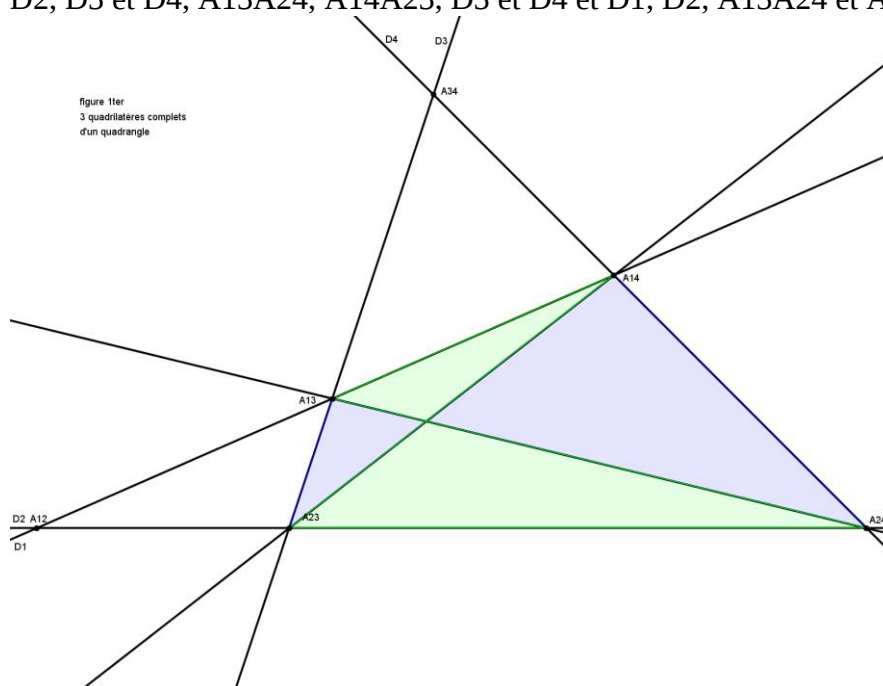
- On utilisera les abréviations QA pour quadrangle, QC pour quadrilatère complet, figure étudiée par Steiner et Miquel, QI pour quadrilatère inscrit, H3 pour hypocycloïde à 3 rebroussements ou deltoïde, courbe étudiée par Euler et E1 pour épicycloïde à 1 rebroussement ou cardioïde, courbe étudiée par Morley.
- Certes, il n'est pas nécessaire de connaître la parabole ou la deltoïde, encore moins la cardioïde et les triangles de Morley ou les cubiques de Van Rees et de Eckart, pour démontrer, comme J.P. Ehrmann ou J.W. Clawson, les propriétés traditionnelles du QC énoncées dans le texte fondateur de Steiner ou, comme J.L. Aymé, la concurrence des médiatrices d'Euler au point de Kantor-Hervey. Mais le QC sans toutes ces belles courbes, c'est un peu Blanche-Neige sans les 7 nains ...
- On présentera donc successivement la définition et les propriétés traditionnelles du QC, le point de Kantor-Hervey, l'orthocentre du QI, la parabole et la deltoïde tangentes aux Di, la cardioïde tangente aux 4 Ci, les 27 cardioïdes tangentes aux 4 Di, la cubique de Eckart, les coordonnées cartésiennes et barycentriques avec les faisceaux de coniques, la courbe de Van Rees, les coordonnées trilineaires, les coordonnées complexes et la géométrie inversive développée par F. Morley.
- On ne cherchera pas nécessairement à refaire toutes les démonstrations existantes, les plus connues étant seulement esquissées ; d'autres, en revanche, moins connues ou inédites, sont complètement développées, comme l'appartenance du point N à la droite de Newton, la relation de transformation (inversion et symétrie axiale) entre la parabole tangente aux 4 droites Di et la cardioïde tangente aux 4 cercles Ci, le lien entre la deltoïde considérée et les deltoïdes de Steiner des 4 triangles Ti, la relation entre les triangles de Morley de ces triangles et les cardioïdes tangentes aux 4 Di ou les 3 mystérieux points communs au cercle de centre G passant par M et à plusieurs coniques évoquées dans la partie sur les coordonnées barycentriques.
- Pour les mêmes raisons, on ne détaillera pas la bibliographie abondante déjà citée par Jean-Pierre Ehrmann, John Wentworth Clawson et Jean-Louis Aymé et on fournira plutôt les références précises des articles non repris par ces 3 auteurs.

A) Définition et propriétés traditionnelles du QC figures 1,1bis, 1ter, 2, 3, 4, 4bis et 5
(cf A. Oppermann (17), J.W. Clawson (18) et J.P. Ehrmann (28))

- Un QA est déterminé par 4 points dans un ordre donné et un QC est défini par 4 droites D_i ou par leurs 6 points d'intersection 2 à 2 A_{ij} , déterminant 12 côtés $A_{ij}A_{ik}$ et 3 diagonales $A_{ij}A_{kl}$. On note qu'un QC comprend 3 QA, dont les diagonales sont 2 des 3 diagonales du QC. Sur la figure 1bis, les 3 QA sont $A_{13}A_{14}A_{24}A_{23}$, $A_{23}A_{34}A_{14}A_{12}$ et $A_{13}A_{34}A_{24}A_{12}$.



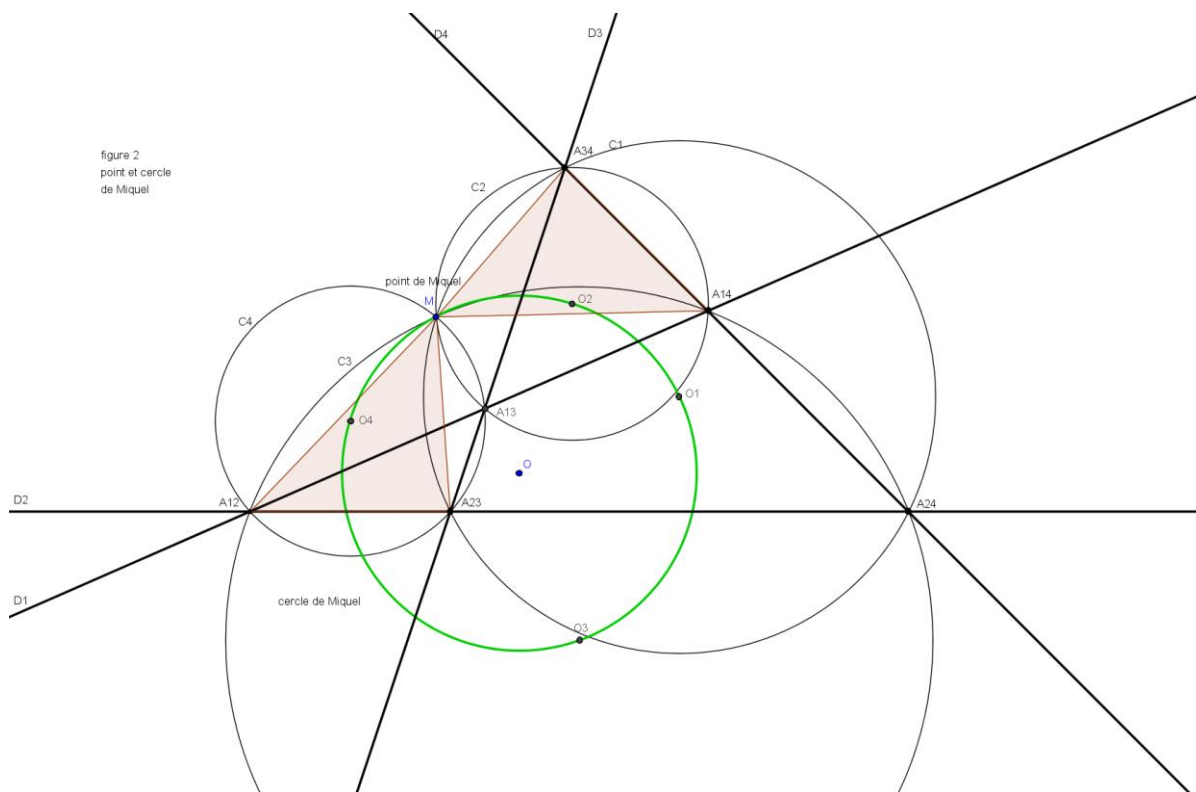
- A l'inverse, on passe d'un QA à un QC en prolongeant les côtés ; ainsi, $A_{13}A_{23}$ et $A_{14}A_{24}$ se coupent en A_{34} et $A_{13}A_{14}$ et $A_{23}A_{24}$ en A_{12} . Comme il y a 3 manières de joindre 4 points 2 à 2, un ensemble de 4 points détermine 3 QC différents, chaque couple de points étant tour à tour côté ou diagonale ; au total, le QC d'origine détermine 3 QA et chaque QA détermine à son tour 2 autres QC associés au premier. Sur la figure 1ter, les 3 QC sont déterminés par les droites D_1 , D_2 , D_3 et D_4 , $A_{13}A_{24}$, $A_{14}A_{23}$, D_3 et D_4 et D_1 , D_2 , $A_{13}A_{24}$ et $A_{14}A_{23}$.



- On appelle $\mu_{ij} = \mu_{kl}$ le milieu du segment $A_{ij}A_{kl}$.
- On appelle T_i le triangle déterminé par 3 droites D_j, D_k et D_l , C_i son cercle circonscrit, de centre O_i et de rayon R_i , G_i son centre de gravité, H_i son orthocentre et N_i le centre de son cercle d'Euler, de rayon $r_i = 1/2 R_i$.

Le texte fondateur de Jakob Steiner (1) contient les 10 points suivants (St1 à St10) :

- Les 4 cercles C_i passent par un même point M , appelé point de Miquel (St1) (on démontre classiquement cette propriété en utilisant le théorème du pivot et la similitude des triangles $MA_{ik}A_{il}$ et $MA_{jk}A_{jl}$, qui laisse M invariant et transforme A_{ik} en A_{jk} et A_{il} en A_{jl} , D_i en D_j et C_i en C_j (3)). M est le point QL-P1 de EQF.
- Les 4 points C_i et le point M appartiennent à un même cercle C de centre O , appelé point centrique du QC et de rayon $OM = r$, appelé cercle centrique ou de Miquel (St2). O est le point QL-P4 de EQF et C est le cercle QL-Ci3 de EQF. (on appelle O'_i et M' les points diamétralement opposés aux O_i et à M sur ce cercle, K_i les points d'intersection autres que O_i des droites O_iH_i avec ce cercle et X_i les seconds points d'intersection autres que M des cercles C_i avec ce cercle).

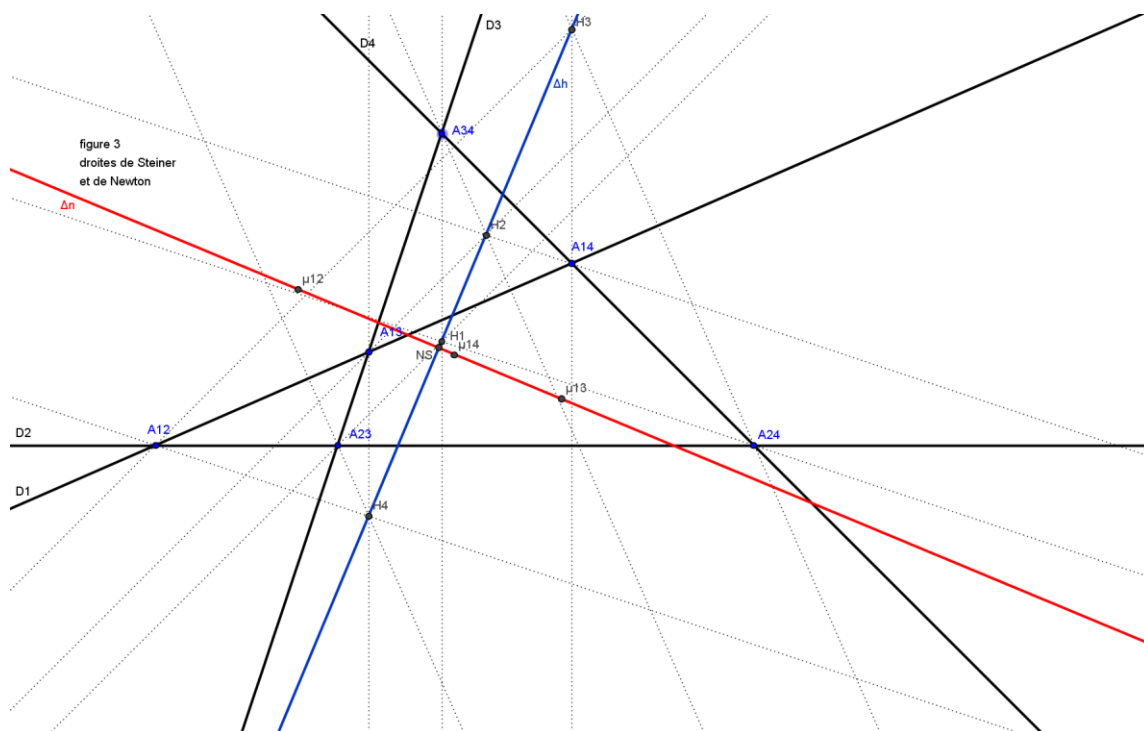


- Les projections orthogonales m_i de M sur les 4 droites D_i sont alignées sur la droite δ , droite de Simson de M par rapport aux 4 triangles T_i (St3).
- Les symétriques M_i de M par rapport aux points m_i et donc par rapport aux droites D_i et les orthocentres H_i sont alignés sur la droite Δ_h , droite de Steiner de M par rapport aux 4 triangles T_i et appelée droite de Steiner-Miquel du QC (St4).
- Les droites de Simson δ et de Steiner Δ_h sont parallèles et Δ_h se déduit de δ dans une homothétie de centre M et de rapport 2 (St5). δ et Δ_h sont les droites QL-L3 et QL-L2 de EQF.

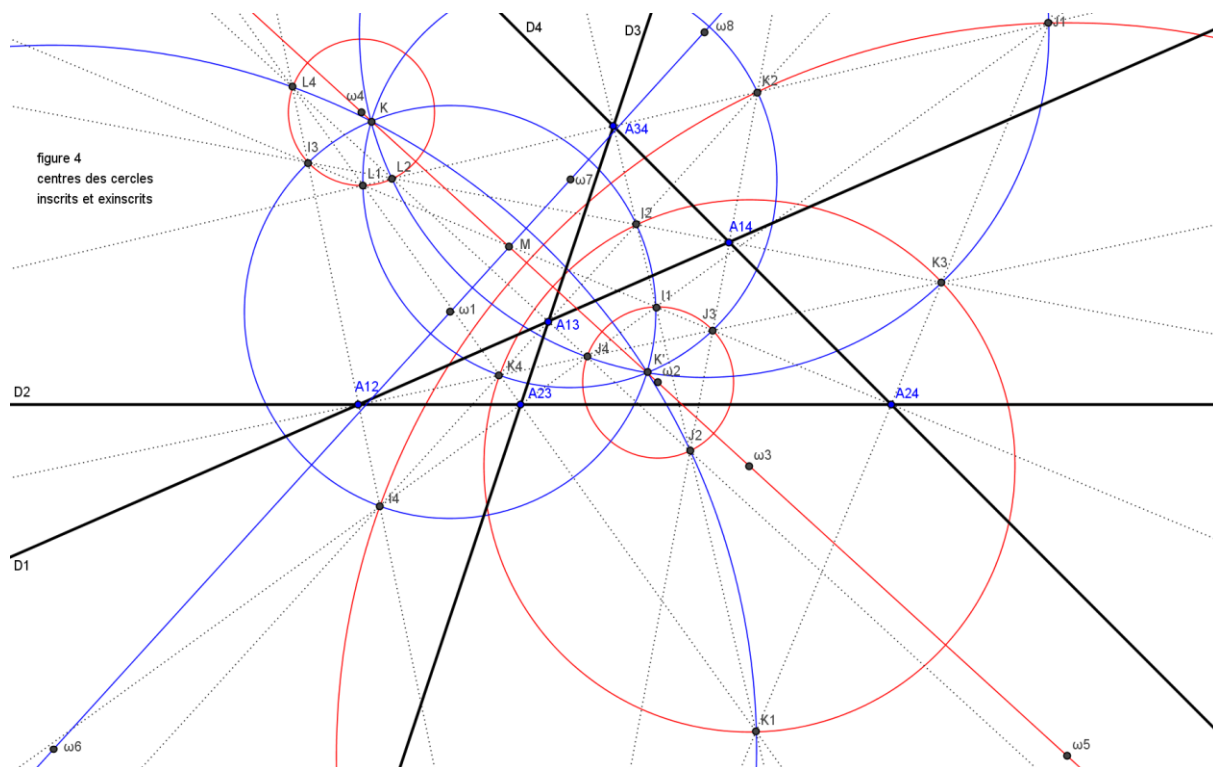
- Les 3 milieux des diagonales μ_{ij} , μ_{ik} et μ_{il} sont alignés sur une droite Δ_n , appelée droite de Newton du QC (St6).

J.L. Aymé a recensé, dans un petit ouvrage passionnant, une trentaine de manières d'établir cette propriété. Δ_n est la droite QL-L1 de EQF (33).

- La droite de Newton Δ_n est perpendiculaire aux droites δ et Δ_h (St7).
(on appelle point de Newton-Steiner le point d'intersection NS des droites de Newton et de Steiner ; c'est le point QL-P7 de EQF)

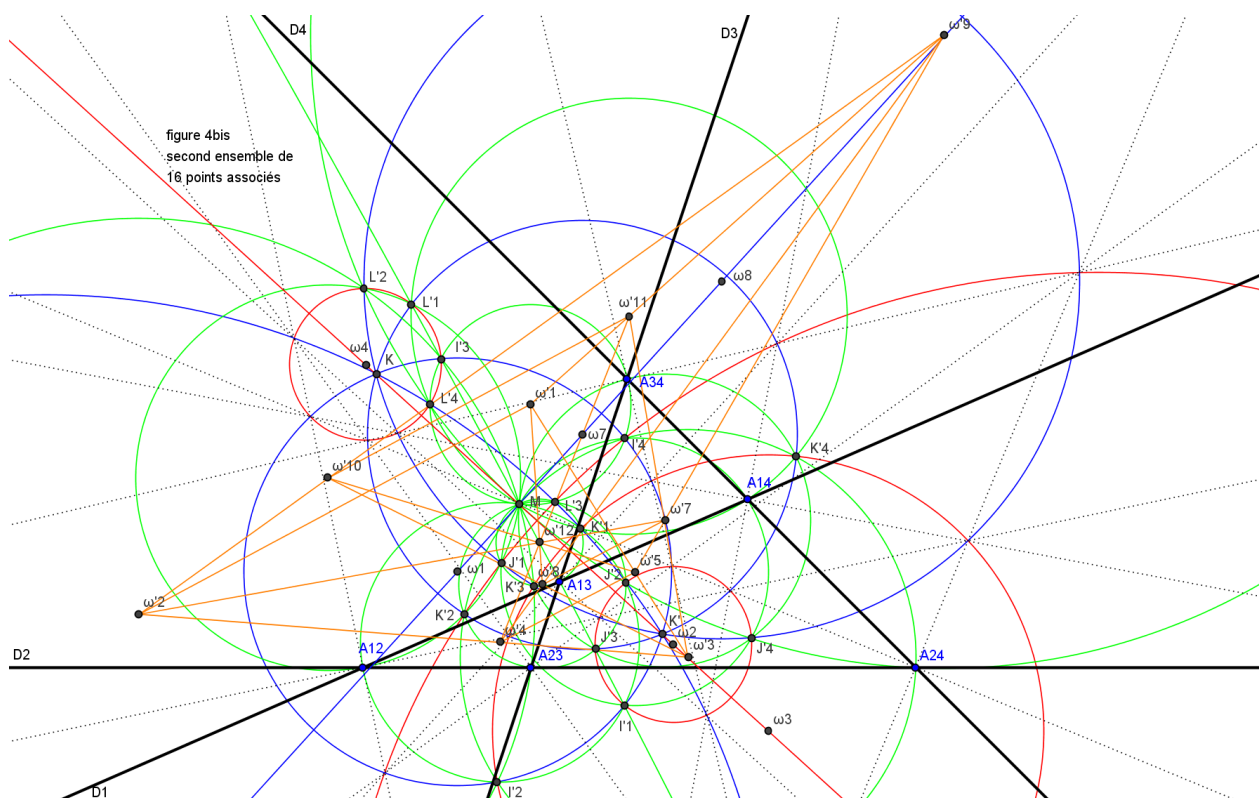


- Les bissectrices intérieures et extérieures des angles aux sommets A_{ij} sont au nombre de 12 ; elles déterminent 16 centres des cercles inscrit et exinscrits dans les triangles T_i , chaque point étant, par construction, à l'intersection de 3 droites. Ces points sont, 4 par 4, sur les 12 bissectrices et, toujours 4 par 4, sur 8 cercles, chaque point étant à l'intersection de 2 cercles (St8).
- Ces cercles forment 2 faisceaux orthogonaux de 4 cercles chacun et leurs centres sont sur 2 droites perpendiculaires, 4 sur l'une et 4 sur l'autre (St9).
Selon EQF, le barycentre des 8 centres est le point O, centre du cercle de Miquel.
- Ces 2 droites se coupent au point de Miquel M (St 10).
(on verra que ces 2 droites sont les bissectrices communes des angles $A_{ij}MA_{kl}$)
- Les points caractéristiques de ces 2 faisceaux (de base pour l'un, de Poncelet pour l'autre) sont les 2 points K et K' invariants de la transformation Clawson-Schmidt (cf fin du point B) et intersections du cercle d'inversion avec une des bissectrices.
- Si l'on oriente les 4 droites D_i , il n'y a qu'un cercle tangent à chaque ensemble de 3 droites et seulement 4 points sur un cercle au lieu de 16 sur 8 cercles. Si l'on choisit, par exemple, l'orientation donnée aux D_i par la parabole, on a les points I1, I2, I3 et I4 sur le cercle de centre ω_1 ; si l'on retient l'orientation donnée aux D_i par la deltoïde, on a les points I3, L1, L2 et L4 sur le cercle de centre ω_4 .



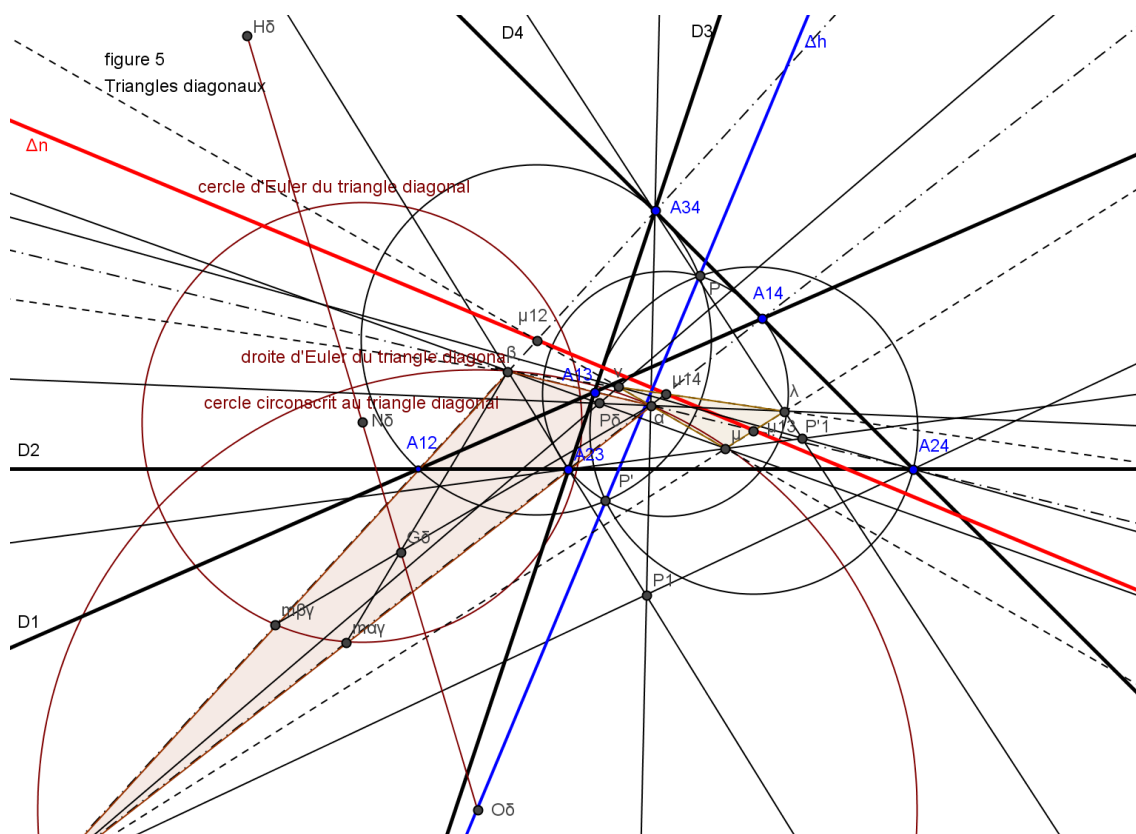
En apprenant ces 10 résultats de Steiner, le mathématicien de Princeton Joseph Cohen aurait déclaré « et la dernière étape est : Dieu existe » (cité par Steve Sigur).

- On peut aller plus loin dans la réflexion sur les droites orientées (F. H. Loud (10)). Si l'on choisit une référence pour les 4 droites, par exemple à nouveau l'orientation donnée par la parabole, on remarque que si le cercle de centre ω_1 correspond à une orientation conventionnelle positive pour les 4 droites les cercles de centres ω_5 à ω_8 s'obtiennent en inversant le sens d'une des 4 droites, comme le cercle de centre ω_4 en inversant le sens de D_3 pour obtenir l'orientation donnée par la deltoïde, alors que les cercles de centres ω_2 à ω_4 s'obtiennent en inversant le sens de 2 des 4 droites D_i .
- Mieux encore, si l'on considère maintenant le second point d'intersection de chaque cercle du premier faisceau avec ceux du second faisceau, on détermine un deuxième ensemble de 16 points eux aussi situés par construction sur les 8 cercles considérés à raison de 4 points par cercle et chaque point étant à l'intersection de 2 cercles. Mais ces 16 points sont, en outre, situés sur 12 autres cercles à raison de 4 points par cercle, chaque point étant à l'intersection de 3 cercles. Ces 12 cercles passent par le point M et constituent 6 paires de cercles orthogonaux, le second point d'intersection étant, pour chaque paire, l'un des 6 sommets du QC. Les centres ω_1 à ω_{12} de ces cercles sont 2 par 2 sur les 6 médiatrices des segments joignant M aux 6 sommets, (çàd les côtés et diagonales du QI formé par les O_i) et ils sont alignés 3 par 3 sur les 16 médiatrices des segments joignant M aux 16 points. (sur la figure 4bis, les points I_1 , I_3 , J_3 et L_1 sont alignés, le point ω_6 est à l'infini et le point ω_{12} est le milieu de MA_{13})



Quelques autres propriétés méritent d'être signalées :

- Les cercles de diamètres $A_{ij}A_{kl}$ se coupent en 2 points communs de Δ_h , appelés points de Plücker. Ce sont les points QL-P1a et QL-P1b de EQF.
(la puissance de chacun des 4 points H_i par rapport aux 3 cercles est la même)
- Ces 2 points sont sur le cercle de Plücker, qui a pour centre le point N (cf infra partie C) et passe par M. C'est le cercle QL-Ci5 de EQF.
- Le premier triangle diagonal $\alpha\beta\gamma$ formé par les 3 diagonales est en perspective avec chacun des triangles T_i ; les droites joignant ses sommets aux milieux des diagonales forment un second triangle diagonal $\lambda\mu\nu$, en perspective à la fois avec chacun des triangles T_i et avec le premier triangle diagonal. Le centre de perspective P_δ entre les 2 triangles diagonaux est le point QL-P13 de EQF.
- Le centre O_δ du cercle circonscrit au premier triangle diagonal est situé sur la droite Δ_h . C'est le point QL-P9 de EQF, centre du cercle QL-Ci1.
- Le cercle d'Euler du premier triangle diagonal passe par le point M. C'est le cercle QL-Ci2 de EQF, son centre N_δ étant QL-P11.
- Les orthopoles de chaque D_i par rapport au triangle T_i sont sur la droite Δ_h (15).
- L'isobarycentre B des 6 points A_{ij} est aussi celui des 3 milieux des diagonales ; il est donc sur la droite de Newton Δ_n . C'est aussi l'isobarycentre des 4 centres de gravité G_i des triangles de référence T_i . C'est le point QL-P12 de EQF.
- Les 6 segments joignant les milieux de deux côtés opposés se coupent 2 à 2 en leurs milieux ; ces 3 points sont sur la droite de Newton Δ_n .
- Les perpendiculaires à D_i et D_j menées respectivement par les milieux de A_{jk} et A_{jl} et de A_{ik} et A_{il} se coupent au milieu de H_kH_l , donc sur Δ_h .



- Il faut du reste savoir raison garder et rester modeste ; ainsi, L. Ripert (11) indique que le point de Miquel se trouve sur 9 cercles et 12 droites remarquables et que le cercle de Miquel passe par 25 points remarquables, mais J.W. Clawson (18) ne dénombre pas moins de 16 droites et 134 cercles passant par le point de Miquel, 7 points sur la droite de Newton (encore ne comptait-il pas les points N et N', objet d'un court article complémentaire !), 38 points sur la droite de Steiner-Miquel et 47 points sur le cercle de Miquel ...
- On peut enfin introduire une dernière notion, celle du QC diagonal. Un QC est déterminé par 4 droites, çàd un triangle de référence et une 4^{ème} droite, appelée ménélienne de ce triangle. On appelle QC diagonal du QC le QC formé par le triangle diagonal et par la droite de Newton du QC, prise comme ménélienne.
- Les propriétés suivantes sont immédiates :
 - Le point de Miquel du QC diagonal, appelé M_{Δ} , est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal, de centre O_{δ} , et sur le cercle d'Euler du second triangle diagonal (on l'identifie aisément comme le point QL-P17 de EQF).
 - Le barycentre des 6 points du QC diagonal, appelé B_{Δ} est par construction le milieu du segment joignant le barycentre des 3 milieux des diagonales, çàd le barycentre B des 6 points du QC, et le centre de gravité du triangle diagonal G_{δ} .

B) Point de Kantor-Hervey

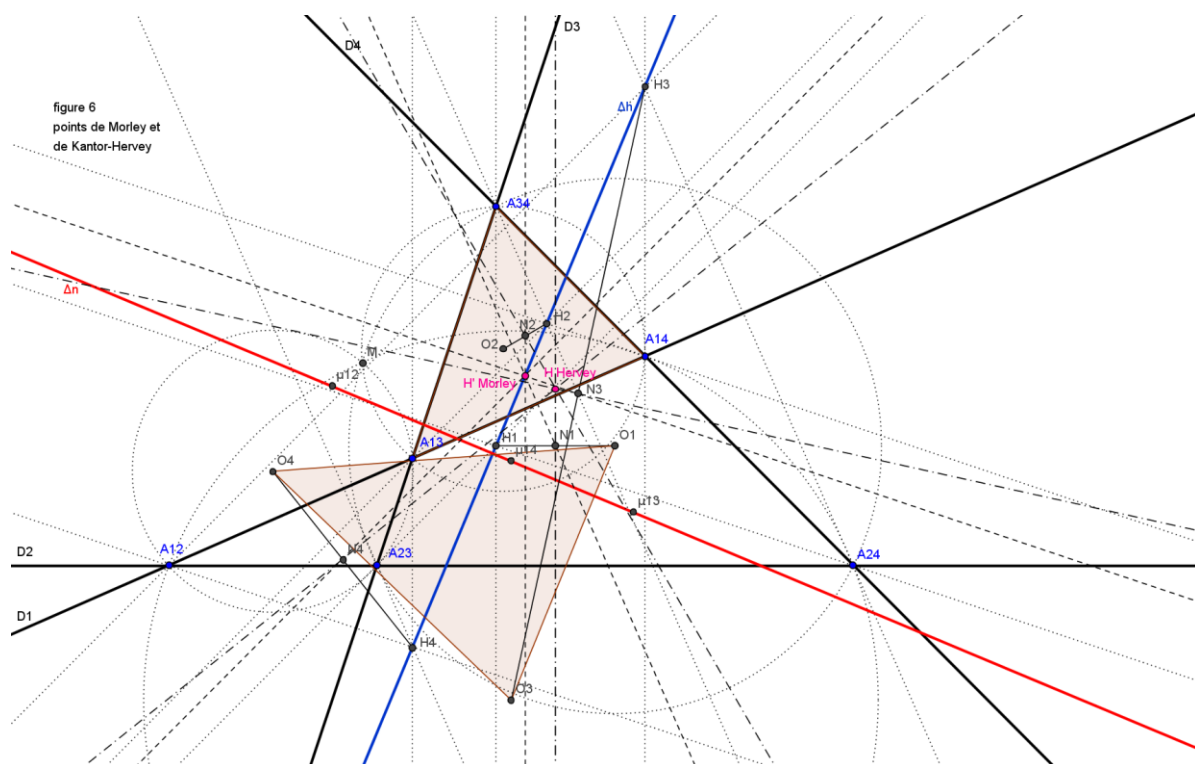
figures 6 et 2bis

(cf S. Kantor (7), F.R.J. Hervey (8), V. Thébault (21), H.E. Fettis (22) et J.L. Aymé (33))

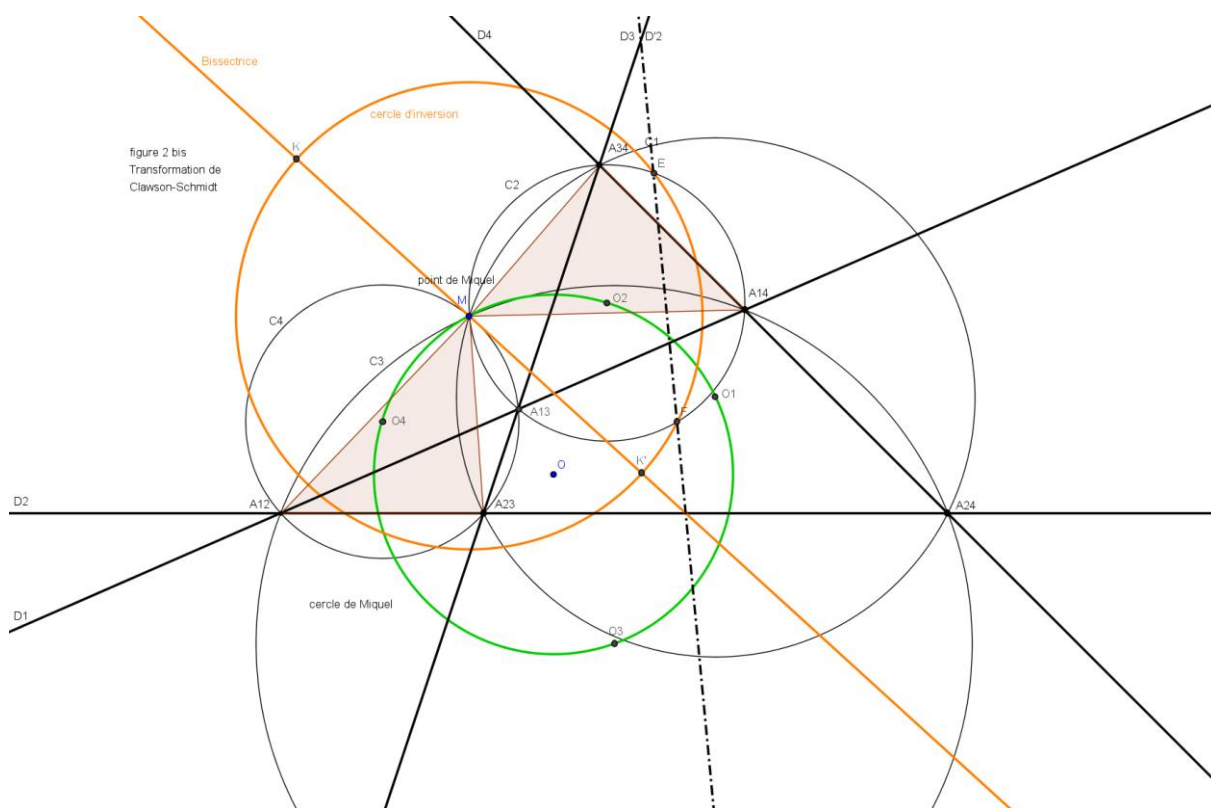
- On appelle t_i le triangle de sommets O_j , O_k et O_l ; C est son cercle circonscrit, de centre O et de rayon r , g_i son centre de gravité, h_i son orthocentre et n_i , milieu de $O h_i$, son centre du cercle d'Euler, de rayon $r/2$.
- On considère la similitude S_i de centre M , d'angle θ_i et de rapport $1/2 \cos \theta_i$.
- Les triangles T_i et t_i sont semblables dans la similitude S_i ; t_i est le triangle de Miquel de T_i . On a $S_i(T_i) = t_i$ et $S_i(C_i) = (C)$ pour tout i de 1 à 4.

L'angle θ_i est ainsi déterminé $m^\circ 2\pi$ par la similitude S_i .

- D_i est la droite de Steiner de M par rapport à t_i , elle passe par l'orthocentre h_i et fait un angle θ_i avec Δh . Les projections orthogonales m_i de M sur les 4 droites de Steiner D_i de M par rapport aux 4 triangles t_i étant alignées sur δ , on appellera δ la droite de Steiner du QI. Les projections orthogonales de M sur les droites de Simson de M par rapport aux 4 triangles t_i sont les milieux des segments $M m_i$ et sont alignés sur une droite δ' parallèle à δ et à Δ et s'en déduisant dans des homothéties de centre M et de rapports respectifs $1/2$ et $1/4$; on appellera de la même manière δ' la droite de Simson du QI.
- D_i est une droite de Simson généralisée de M par rapport à T_i et M se projette sur D_j , D_k et D_l en A_{ij} , A_{ik} et A_{il} selon le même angle $(MA_{ij}, D_j) = \pi/2 - \theta_i$.
- Les triangles semblables T_i et t_i sont en perspective ; les droites $A_{jk}O_l$, $A_{jl}O_k$ et $A_{kl}O_j$ concourent au point X_i .



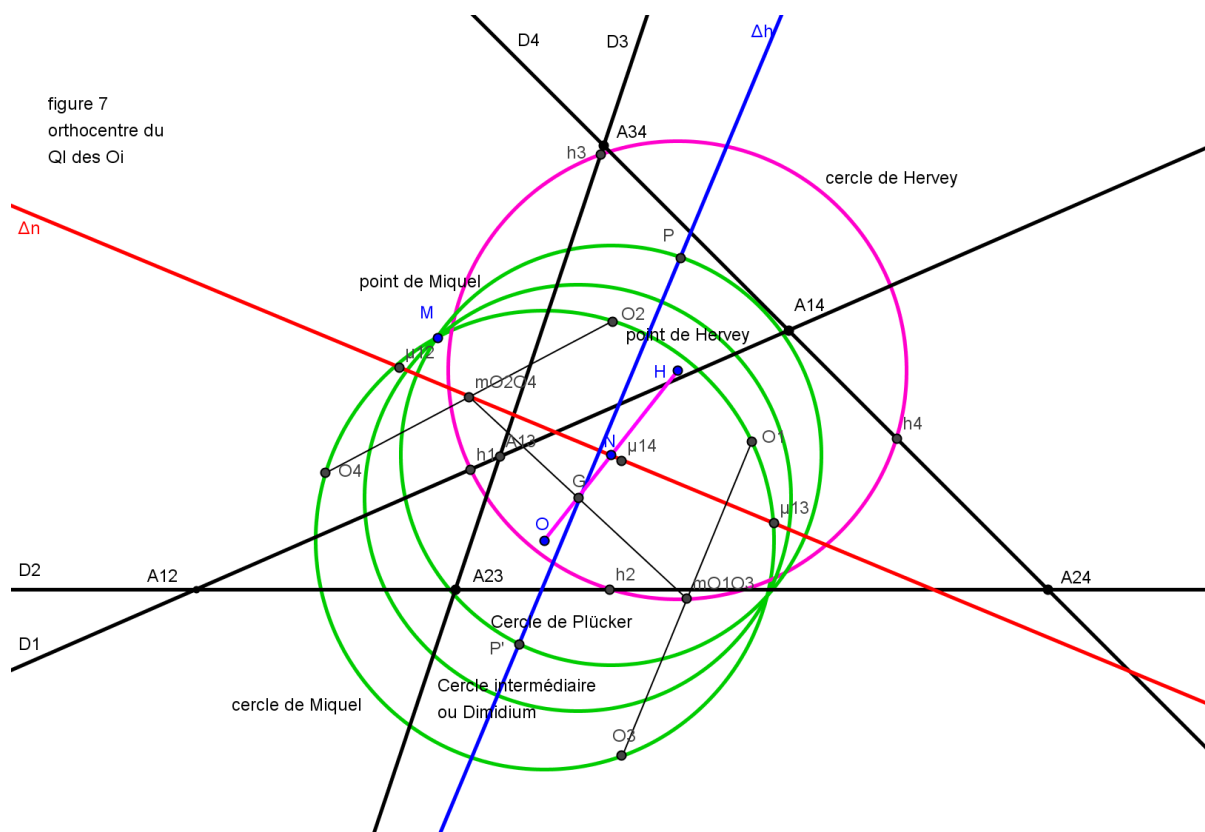
- On considère la similitude s_i de centre O_i , d'angle θ_i et de rapport $1/\cos \theta_i$.
- On appelle H le transformé de N_i dans la similitude s_i . Ce point est le point de Kantor-Hervey du QC. C'est le point QL-P3 de EQF.
- Les médiatrices des segments $O_i H_i$ concourent en H ; les triangles MOO_i , $MH_i H_i$ et $O_i H H_i$ sont isocèles et semblables, les angles à la base étant égaux à θ_i . Les triangles $MO_j A_{kl}$, $MO_k A_{jl}$ et $MO_l A_{jk}$ sont eux aussi isocèles et semblables aux triangles MOO_i , les angles à la base étant égaux à θ_i .
- Les perpendiculaires menées par O_i aux droites MK_i (hauteurs des triangles $MK_i O_i$ inscrits dans le cercle de Miquel C) concourent aussi en H .
- On tire aisément de la similitude des triangles T_i et t_i la mesure des segments et des angles du QC et une belle propriété :
 - on a $R_i = 2r \cos \theta_i$, $OkOl = 2r \sin(\theta_l - \theta_k)$, $A_{jk} A_{jl} = 4r \cos \theta_i \sin(\theta_l - \theta_k)$ et $MA_{ij} = 4r \cos \theta_k \cos \theta_l$ (en toute rigueur avec des valeurs absolues).
 - On appelle M_x la parallèle menée par M à la droite de Newton ; on a les mesures d'angles $(M_x ; MA_{ij}) = (\theta_i + \theta_j)$, $(M_x ; MO_i) = (\theta_j + \theta_k + \theta_l)$ et $(M_x ; MO) = \sum \theta_i$. Les bissectrices des angles $(M_x ; MO)$, $\angle A_{ij} M A_{kl}$ et de l'angle entre MO_i et la perpendiculaire en M à D_i sont confondues.
 - L'inversion de centre M et de rapport $2\pi r_i = 2pr = 16r^2 \Pi \cos \theta_i$ transforme le QC en son symétrique par rapport à ces bissectrices et échange les droites et les cercles D_i et C'_i , C_i et D'_i , C et Δ^h et C' et Δ^h . Du coup, la transformation qui combine l'inversion et la symétrie axiale échange les points A_{ij} et A_{kl} et laisse le QC globalement inchangé ; elle est appelée transformation Clawson-Schmidt dans EQF, où elle joue un rôle important.



C) Orthocentre du QI des 4 centres des cercles circonscrits O_i
(cf A. Levelut (34))

figure 7

- On appelle G l'isobarycentre des O_i , N l'anticentre du QI formé par les O_i et H son orthocentre ; on a $\mathbf{OH} = 2 \mathbf{ON} = 4 \mathbf{OG} = \sum \mathbf{OO}_i$. G , N et H sont appelés respectivement QL-P6, QL-P5 et QL-P3 dans EQF. On a déjà vu que les cercles de Miquel et de Plücker passent tous 2 par M et ont respectivement pour centres O et N ; G étant au milieu de ON , EQF introduit le cercle intermédiaire ou Dimidium de centre G et passant aussi par M : c'est le cercle QL-Ci6 de EQF.
- On a par ailleurs $\mathbf{Ohi} = \sum \mathbf{OO}_j$ avec $j \neq i$ et $\mathbf{Ohi} + \mathbf{OO}_i = 2 \mathbf{ON} = \mathbf{OH}$; N est le milieu de OH et des segments $Oihi$.
- Dans la similitude Si , on a $O_j = Si(A_{kl})$, $h_i = Si(H_i)$ et $O = Si(O_i)$, ce qui entraîne $Si(\mathbf{O_iH_i}) = Si(\sum \mathbf{O_iA_{kl}}) = \sum Si(\mathbf{O_iA_{kl}}) = \sum \mathbf{OO}_j = \mathbf{Ohi}$ et ainsi, par définition, $\mathbf{O_iH} = \mathbf{OH} - \mathbf{OO}_i = \mathbf{Ohi}$; on a donc $Si(\mathbf{O_iH_i}) = \mathbf{O_iH}$.
- Ce point H coïncide avec le point de Kantor-Hervey, défini par $H = si(N_i)$, H étant le sommet du triangle isocèle O_iHH_i et l'angle à la base valant θ_i .
- Si l'on considère les 4 droites parallèles aux 4 D_i par les points O_i , on notera qu'elles déterminent un QC symétrique du précédent par rapport à N : le point de Miquel, les sommets, les cercles circonscrits, les orthocentres et la droite des orthocentres sont les symétriques de M , des A_{ij} , des C_i , des H_i et de Δh par rapport à N ; O et H , les O_i et h_i et les cercles (C) et (Γ) échangent leurs rôles et la droite de Newton est la même.
- Les segments $Oigi$ concourent en G ; on a, en effet, $\mathbf{Ogi} = 1/3 \mathbf{Ohi} = -1/3 \mathbf{HOi}$ et $\mathbf{GO} = -1/3 \mathbf{GH}$.
- On appelle $t'i$ le triangle de sommets h_j , h_k et h_l ; $t'i$ est symétrique de t_i par rapport à N . Γ est son cercle circonscrit de centre H et de rayon r , $g'i$ son centre de gravité, O_i est son orthocentre et $n'i$, milieu de HO_i , le centre de son cercle d'Euler, de rayon $r/2$. N est le milieu des segments $gig'i$ et $nin'i$.
- Les h_i forment un QI symétrique par rapport à N du QI formé par les O_i ; H est le centre de son cercle circonscrit de rayon r , G' , milieu de HN et symétrique de G par rapport à N , est l'isobarycentre des h_i , N est aussi l'anticentre du QI formé par les h_i et O est son orthocentre.
- N est le centre du cercle d'Euler commun aux 2 QI formés par les O_i et les h_i , de rayon $r/2$, qui passe par les 4 n_i et les 4 $n'i$ et il appartient aux 8 cercles d'Euler des triangles t_i et $t'i$, de centres n_i et $n'i$ et de rayon $r/2$. C'est par définition le point d'Euler-Poncelet des 2 QI formés l'un par les O_i et l'autre par les h_i . EQF lui donne le nom de centre de Clawson du QC, car J.W. Clawson est le premier à avoir démontré que N et N' sont sur la droite de Newton.
- oi est le milieu de MO_i , ω_i celui de Mh_i , o celui de MO et ω celui de MH . Les segments oin_i concourent en leur milieu, qui est aussi celui de oN et de $O\omega$; de même, les segments $\omega in'i$ concourent en leur milieu, qui est celui de ωN et de oH et les segments $oi\omega_i$ concourent en leur milieu, qui est celui de MN .
- Les médiatrices des segments oiN_i concourent en N (les triangles $oiNN_i$ étant isocèles et semblables aux triangles MOO_i , les angles à la base étant égaux à θ_i).



- La similitude s_i de centre O_i , d'angle θ_i et de rapport $1/\cos\theta_i$ s'obtient de 2 manières comme produit de 3 transformations : homothétie de centre G_i et de rapport 2, similitude S_i et symétrie par rapport à N - on vérifie que O_i est le point fixe ($O_i - H_i - h_i - O_i$) et que H est le transformé de N_i ($N_i - O_i - O - H$) - ou similitude S_i , symétrie par rapport à N et homothétie de centre g'_i et de rapport 2 - on vérifie ($O_i - O - H - O_i$ et $N_i - n_i - n'_i - H$) - ; la seconde composition se ramène du reste au produit de 2 transformations : similitude S_i suivie de homothétie de centre O'_i et de rapport 2 - on vérifie ($O_i - O - O_i$ et $N_i - n_i - H$).
- Les triangles t_i et t'_i sont symétriques par rapport à N ; t'_i est inscrit dans T_i et se déduit du triangle médian de T_i dans la similitude s_i .
- Le cercle circonscrit à t'_i est le cercle podaire de O_i et de son conjugué isogonal H_i et le centre de ce cercle est sur la médiatrice de $O_i H_i$; il se déduit de N_i dans la similitude s_i , c'est donc le point H (cf Lalesco Géométrie du triangle).
- O_i se projette sur D_j , D_k et D_l en h_j , h_k et h_l selon le même angle $\pi/2 - \theta_i$; comme MA_{ij} et $O_i h_j$ sont perpendiculaires à $OkOl$, elles sont parallèles et les deux angles ($O_i h_j ; D_j$) et ($MA_{ij} ; D_j$) sont égaux à $\pi/2 - \theta_i$.
- Si on appelle H' l'isobarycentre des H_i , point de Morley du QC (QL-P2 de EQF), et N' le milieu de OH' (QL-P22 de EQF), on peut démontrer 4 propriétés liées :
 - Les points N et N' sont sur la droite de Newton Δ_n .
 - Le point H' est la projection orthogonale de H sur la droite Δ_h .
 - Le centre de gravité du triangle ONH' est l'isobarycentre B des 6 A_{ij} .
 - Les perpendiculaires aux D_i par les milieux N_i des $O_i H_i$, centres des cercles d'Euler des T_i , passent par le point H' .

Ces propriétés se démontrent aisément analytiquement (cf infra).

Mais on peut aussi considérer la transformation qui associe à un point du plan le milieu du segment joignant les symétriques par rapport à 2 droites concourantes ; cette transformation s'obtient par combinaison d'une homothétie ayant pour centre le point d'intersection des 2 droites et pour rapport le cosinus de l'angle qu'elles déterminent et d'une symétrie par rapport à la bissectrice de cet angle. En combinant les 4 points O_i 2 à 2, on obtient 3 couples de droites et 3 transformations ; les 4 points étant cocycliques, il se trouve que les 3 bissectrices obtenues sont parallèles. Les couples de droites O_iO_j et $OkOl$, O_iOk et $OjPl$ et O_iOl et $OjOk$ sont 2 à 2 antiparallèles, comme le sont du reste aussi les couples de droites MA_{ij} et MA_{kl} , MA_{ik} et MA_{jl} et MA_{il} et MA_{jk} , chaque droite MA_{ij} étant perpendiculaire à une droite $OkOl$. Les transformés du point de Miquel M dans les 3 transformations sont les milieux μ_{ij} , μ_{ik} et μ_{il} des 3 segments joignant les symétriques A_{ij} et A_{kl} , A_{ik} et A_{jl} et A_{il} et A_{jk} de M par rapport aux couples de cordes O_iO_j et $OkOl$, O_iOk et $OjOl$ et O_iOl et $OjOk$ du cercle C de Miquel. En outre, le transformé du point O dans chacune de ces 3 transformations est précisément le même point N , anticentre du QI formé par les O_i . Il s'ensuit que les 3 droites $N\mu_{ij}$ passent par le même point et sont parallèles à une même direction symétrique de OM par rapport à la direction commune des 3 bissectrices ; elles sont confondues, ce qui prouve du même coup l'alignement des 3 milieux sur la droite de Newton et l'appartenance de N à cette droite. La direction de OM par rapport à l'axe de la parabole est donnée par $\sum \theta_i$ et celle de la bissectrice commune par $\frac{1}{2} \sum \theta_i$; on peut même préciser que $N\mu_{ij} = r \cos(\theta_i + \theta_j - \theta_k - \theta_l)$, toujours avec une valeur absolue, $N\mu_{ik}$ et $N\mu_{il}$ s'en déduisant en permutant d'abord j et k , puis j et l .

- On peut alors compléter la figure des points remarquables du QI et du QC : OH est la droite d'Euler du QI formé par les O_i , O étant le centre du cercle circonscrit, G le barycentre, N l'anticentre et H l'orthocentre et GH' peut être appelée droite d'Euler du QC , G , B et H' étant respectivement les barycentres des centres des cercles circonscrits, des centres de gravité et des orthocentres des 4 triangles T_i .

On appellera pour simplifier OH et GH' les droites d'Euler du QI et du QC .

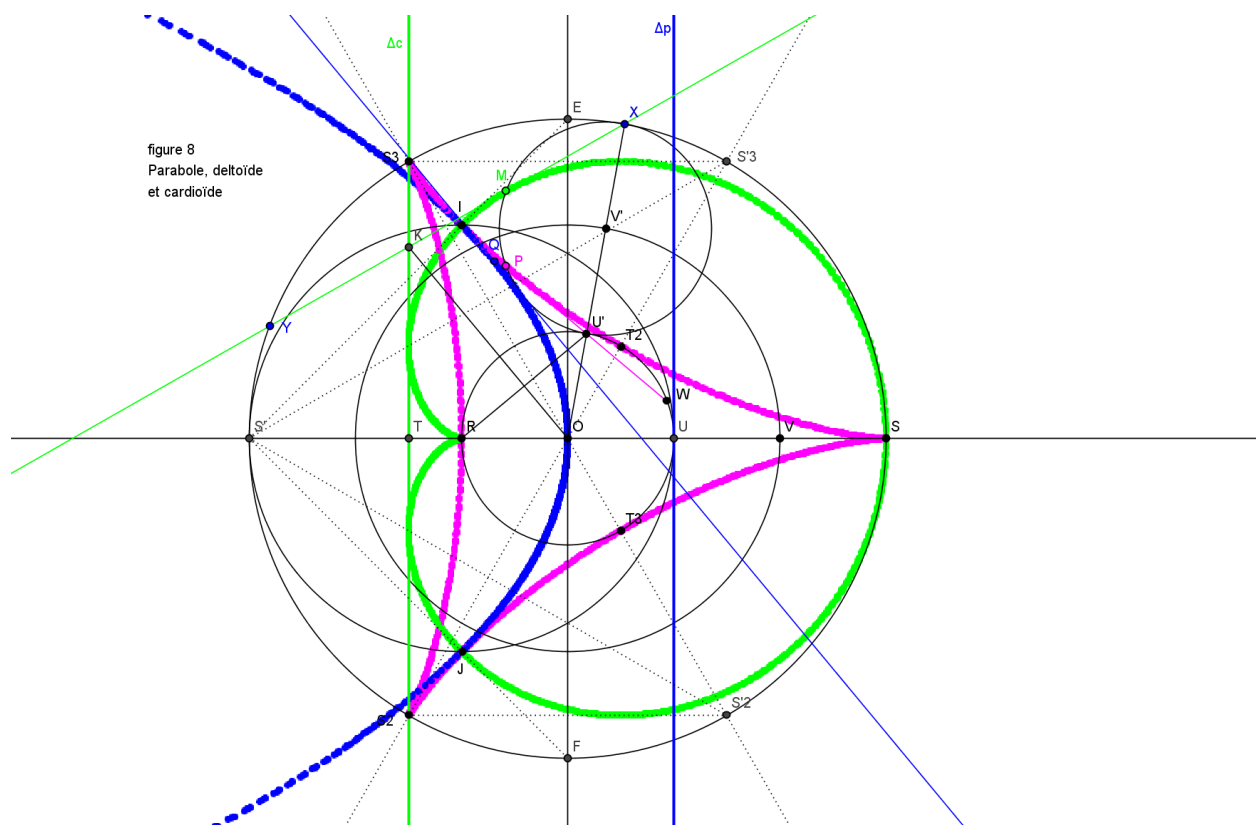
- En reprenant le QC diagonal évoqué à la fin de la partie A, on peut maintenant ajouter les propriétés suivantes :
 - La droite de Steiner du QC diagonal est la droite $\Delta_{H\Delta}$ passant par $H\delta$ et H' ; c'est la droite $QL-L6$ de EQF . La parabole de foyer $M\Delta$ et de directrice $\Delta_{H\Delta}$ est tangente aux 3 diagonales et à la droite de Newton du QC .
 - Le point de Morley H'_Δ du QC diagonal est le milieu de $H\delta H'$; la droite de Steiner du QC diagonal porte les 2 points de Morley des 2 QC .
 - Le point de Kantor-Hervey H_Δ du QC diagonal est le centre du cercle circonscrit au triangle $H'O\delta H\delta$ (il est sur la médiatrice de $O\delta H\delta$ et se projette en H'_Δ sur $H'H\delta$).
 - Le point de Miquel M_Δ à l'intersection des 2 cercles Dimidium du QC et du QC diagonal ; chaque cercle Dimidium porte ainsi les 2 points de Miquel du QC et du QC diagonal.
 - La connaissance des points B_Δ et H'_Δ permet de compléter la droite d'Euler du QC diagonal et fournit le point G_Δ ; c'est le milieu du segment $Go\delta$.
 - La connaissance de G_Δ et H_Δ permet de compléter la droite d'Euler du QI et fournit les points O_Δ et N_Δ .

D) Courbes remarquables (parabole, deltoïde et cardioïde)

(cf Crémona (5), Laguerre (6), Lemaire(14) et H. Brocard & T. Lemoyne (36))

- Trois courbes retiennent notre attention : la parabole, la deltoïde ou H3 et la cardioïde ou E1 ; elles entretiennent entre elles des rapports étroits, qui apparaissent clairement si on les fait figurer sur une même figure. On prend un repère orthonormé d'origine O ; l'axe des abscisses est l'axe commun à la parabole et à la cardioïde et l'un des 3 axes de la deltoïde. On prend sur cet axe les points R et U, d'abscisses $\pm r$ et les points T, V et S d'abscisses $-r/2$, $2r$ et $3r$.
- La parabole et la cardioïde sont inverses l'une de l'autre dans une inversion ayant pour centre le foyer de la parabole, qui est aussi le point de rebroussement R de la cardioïde et de puissance $2pr$, p étant la distance du foyer à la parabole. La tangente au sommet de la parabole d'abscisse $p/2$ a donc pour inverse le cercle de diamètre RS et de centre U, qui est tangent à la cardioïde en S. La parabole coupe la parallèle à la directrice menée par le foyer aux points $(-r, \pm p)$. Si on a $p = 2r$, la directrice est la tangente en U au cercle de centre O et de rayon r ; la tangente au sommet de la parabole est l'axe des ordonnées Oy. Dans ce cas, les 3 courbes passent par les 2 points I et J $(-r ; \pm 2r)$.
- On considère le cercle de centre O et de rayon r , de diamètre RU, comme un cercle fixe et le cercle de centre V et de rayon r , de diamètre US, comme un cercle variable ; lorsque ce cercle a tourné d'un angle θ autour de O, son centre est passé en V' et le point de contact entre les 2 cercles en U'.
- On peut imaginer la construction suivante comme un engrenage : on laisse fixes les centres O et V des 2 cercles fixe et variable et on fait tourner le cercle fixe d'un angle $-\theta$ à partir de OU ; le point R passe en R'. Le cercle variable tourne en sens inverse du cercle fixe d'un angle θ autour de son centre ; le point S passe en S', symétrique de R' par rapport à la tangente commune aux 2 cercles en U. Pour rétablir la figure, il faut refaire tourner l'ensemble d'un angle θ autour du point O ; le centre du cercle variable V a tourné de l'angle θ sur le cercle de centre O et rayon $2r$ et passe en V' et le point M a tourné d'un angle 2θ sur le cercle variable. R est revenu à sa place et M est le symétrique de R par rapport à la tangente commune aux 2 cercles fixe et variable en leur point de contact U'.
- On peut reprendre la même construction, mais avec le grand cercle de centre O et de rayon $3r$ comme cercle fixe ; le petit cercle variable tourne cette fois dans le même sens que le cercle fixe autour de son centre V d'un angle triple -3θ et le point S passe en S'', symétrique de S' par rapport à l'axe des abscisses Ox ; Pour rétablir la figure, il faut remettre S'' en S, ce qui met à nouveau le centre du cercle variable en V'. Le point P a tourné d'un angle -2θ et se trouve être le symétrique de M par rapport à la parallèle à Ox menée par V'.
- Le point M décrit la cardioïde de centre O, de point de rebroussement R et de sommet S. Si OV' recoupe le grand cercle fixe de rayon $3r$ en X et si Y est le symétrique de S par rapport à OX, XY est la tangente en M à la cardioïde ; elle fait un angle $\pi/2 + 3\theta/2$ avec l'axe Ox et le point de contact M est au tiers du segment XY du côté de X.
- Le point P décrit la deltoïde de sommets S1 (confondu avec S), S2 et S3 et de points de contact avec le petit cercle fixe intérieur (de centre O et de rayon r) T1, T2 et T3. Si PU' recoupe le petit cercle en W, U'W est la tangente en P à la deltoïde ; elle fait un angle $\pi - \theta/2$ avec l'axe Ox (c'est donc la symétrique de RU' par rapport à la parallèle à Oy menée par U') et le point de contact P est le symétrique de W par rapport à U'.

- Le point Q, inverse de M dans l'inversion de centre R et de rayon $RU = 2r$, décrit la parabole de foyer R et de directrice la droite d'équation $x = 2r$, perpendiculaire en U à Ox. La tangente en Q fait un angle $\pi/2 + \theta/2$ avec l'axe Ox ; elle est donc perpendiculaire à RU' ou à la bissectrice de l'angle UOU'.
- On notera que ce choix d'un rayon du grand cercle fixe lié à la cardioïde triple de celui du petit lié à la deltoïde fait coïncider le cercle intérieur des 2 courbes. Du coup, le sommet de la cardioïde coïncide avec l'un des 3 sommets de la deltoïde, la tangente double de la cardioïde et ses 2 tangentes parallèles à Ox se coupent aux 2 autres sommets de la deltoïde. Les 2 segments découpés par la cardioïde sur toute corde passant par son point et par la deltoïde sur toute tangente ont même longueur $4r$ (ainsi IJ ou RS). Enfin les 2 courbes ont même longueur $16r$ et la surface de la cardioïde est le triple de celle de la deltoïde (respectivement $6\pi r^2$ et $2\pi r^2$).



- La parabole est une conique (équation de degré 2) de classe 2 (par un point extérieur, on peut mener 2 tangentes). La deltoïde et la cardioïde sont 2 quartiques (équation de degré 4) unicursales ou de genre 0 (çàd fermées), tricuspidales (3 points de rebroussement, tous réels dans le cas de la deltoïde, un seul réel et 2 imaginaires dans le cas de la cardioïde) et de classe 3 (par un point intérieur pour la deltoïde et extérieur pour la cardioïde, on peut mener 3 tangentes à la courbe).
- Les deltoïdes sont toutes semblables entre elles ; il en va de même pour les cardioïdes. La cardioïde est, comme le cercle, une courbe de direction (notion développée par Laguerre). Ainsi, il n'existe qu'une parabole et une deltoïde tangentes à 4 droites et les tangentes prennent l'orientation de la courbe. En revanche, il existe 4 cercles tangents à 3 droites (inscrit et exinscrits), mais un seul si l'on considère des droites orientées. De même, il existe 27 cardioïdes tangentes à 4 droites, mais une seule si l'on prend des droites orientées.

- La parabole se définit comme la courbe décrite par l'ensemble des points équidistants d'un point fixe, appelé foyer et d'une droite fixe, appelée directrice. La distance du foyer à la directrice est son paramètre p . Cette courbe admet un axe de symétrie passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice.
 - Les projections orthogonales du foyer sur les tangentes sont alignées sur la tangente au sommet et les symétriques du foyer par rapport aux tangentes sont alignés sur la directrice.
 - La courbe orthoptique de la parabole, lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires, est sa directrice ; la droite qui joint les points de contact de ces 2 tangentes passe par le foyer M . (Cette propriété se démontre géométriquement, en remarquant que les parallèles aux 2 tangentes sont parallèles aux bissectrices de 2 angles adjacents supplémentaires ou analytiquement).
-
- Une deltoïde est une hypocycloïde à 3 rebroussements ou H_3 , courbe décrite par un point fixe d'un cercle de rayon r roulant à l'intérieur d'un cercle de rayon $3r$; la courbe est la même (mais décrite en sens inverse) en faisant rouler un cercle de rayon $2r$ à l'intérieur du grand cercle (double génération de Crémona).
 - La courbe a 3 points de rebroussement situés sur le grand cercle fixe et elle est tangente en 3 points à un cercle inscrit de même centre et de rayon r .
 - Toute tangente à la H_3 coupe le cercle inscrit en 2 points h et q ; l'un est dit principal et l'autre secondaire et le point de contact Q avec la H_3 est le symétrique du point secondaire par rapport au point principal.
 - Si T est un point de contact de la H_3 avec le cercle inscrit, on a $\text{arc } Tq = -2 \text{ arc } Th$ et cette propriété permet de donner une première définition de la H_3 comme enveloppe des symétriques des droites joignant un point fixe et un point variable d'un cercle par rapport à une droite de direction fixe passant par le point variable.
 - Par tout point intérieur à la H_3 , il passe 3 tangentes à cette courbe ; le théorème de Laguerre précise que la somme des angles faits par ces tangentes avec une droite fixe est constante.
 - Pour un point situé sur le cercle inscrit, 2 de ces tangentes sont perpendiculaires et le point est secondaire pour elles et principal pour la 3^{ème} ; les 2 tangentes perpendiculaires recoupent le cercle inscrit en 2 points h et h' et les points de contact Q et Q' , symétriques de q par rapport à h et h' , déterminent une nouvelle tangente à la H_3 , perpendiculaire à la 3^{ème} tangente passant par le point q . On a en outre $QQ' = 2 hh' = 4r$.
 - Pour un triangle quelconque, il existe une H_3 tangente à ses 3 côtés et à ses 3 hauteurs et enveloppant l'ensemble des droites de Simson de ce triangle (qui sont les tangentes au sommet des paraboles tangentes à ce triangle, dont les foyers sont sur le cercle circonscrit au triangle). Cette H_3 est appelée H_3 de Steiner ou H_3ST du triangle ; inversement, le triangle est dit triangle principal de la H_3 .
 - Si l'on appelle θ_j , θ_k et θ_l les angles faits par les côtés du triangle avec un axe quelconque, les côtés du triangle équilatéral formé par le triangle des sommets de la H_3ST ont pour direction $1/3 \sum \theta_j \text{ mod } \pi/3$. Ils sont parallèles aux côtés du triangle de Morley déterminé par les trisectrices des 3 angles du triangle ; la formule traditionnelle s'écrit, en revenant à un triangle ABC et en appelant $A'B'C'$ le triangle de Morley, $(BC ; B'C') = 1/3 (\angle B - \angle C)$ et $B'C'$ a ainsi pour direction $\theta_j + 1/3 [(\theta_k - \theta_j) - (\theta_j - \theta_l)] = 1/3 \sum \theta_j$.

- Une H3 quelconque a une infinité de triangles principaux, ayant tous le cercle inscrit dans la H3 comme cercle d'Euler et elle est la H3ST de chacun d'eux ; chaque tangente à la H3 est une droite de Simson pour chaque triangle principal. Le corollaire du théorème de Laguerre est que la somme des angles faits par les 3 côtés avec l'un des axes de la H3 est constante.
- On note en particulier que chaque triangle rectangle de la forme QqQ' a son sommet q sur le cercle inscrit et admet ce cercle comme cercle d'Euler ; c'est un triangle principal de la H3, qui est tangente à ses 3 côtés et à ses 3 hauteurs.
- Pour une H3 donnée, 3 tangentes quelconques forment un triangle circonscrit ordinaire $T(\theta)$, pour lequel toutes les autres tangentes sont des droites de Simson généralisées $D(\theta)$; il existe un point M du cercle circonscrit à $T(\theta)$ qui se projette sur les 3 côtés selon un même angle $\pi/2 - \theta$ en 3 points alignés de $D(\theta)$. Une H3 quelconque a une infinité de triangles ordinaires $T(\theta)$, pour lesquels l'angle θ dépend de la direction de ses 3 côtés par rapport aux axes de la H3.

La cardioïde est à la fois :

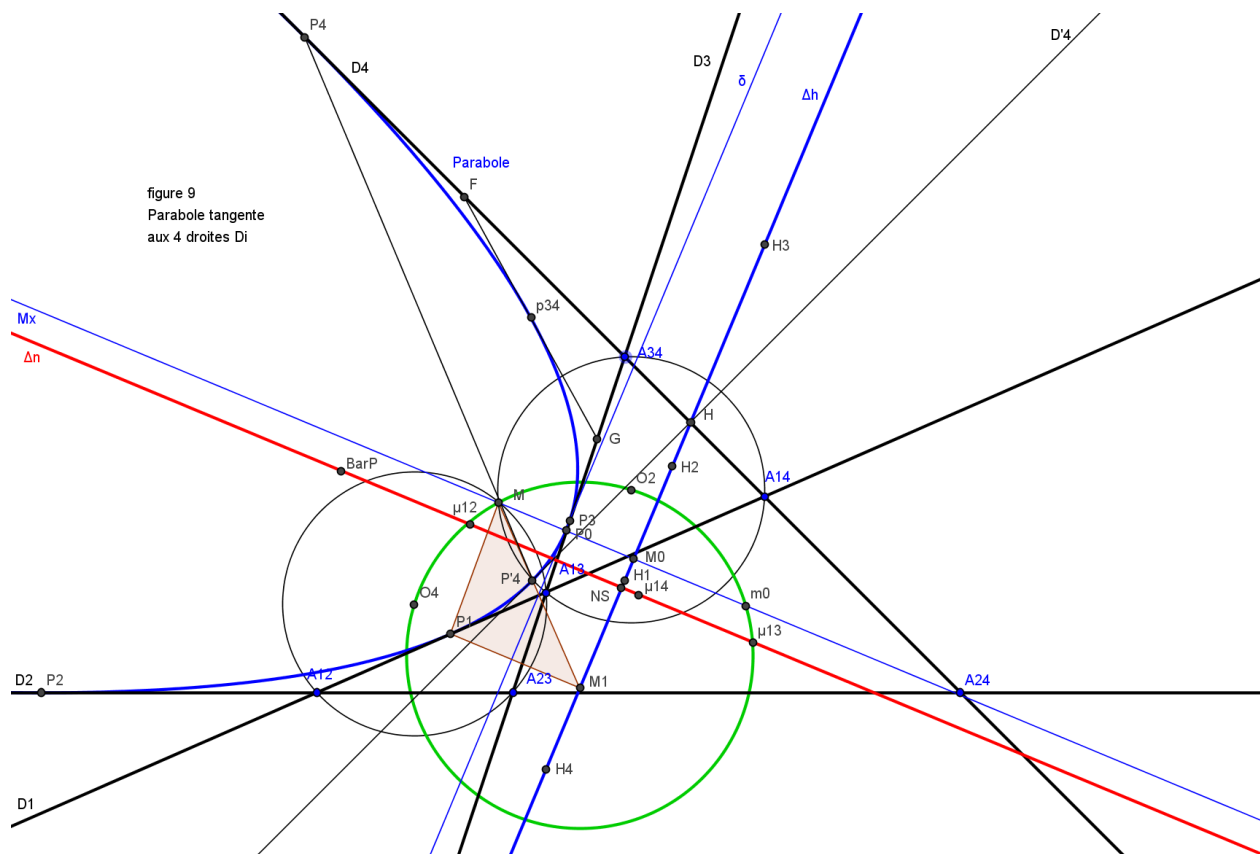
- l'inverse d'une parabole dans une inversion ayant le foyer pour centre.
- une épicycloïde à 1 rebroussement ou E1, courbe décrite par un cercle de rayon r roulant sans frottement sur un autre cercle fixe, appelé cercle intérieur, de même rayon ; la courbe est la même en faisant rouler un cercle de rayon $2r$ autour du même cercle fixe qui lui reste intérieur (double génération de Crémona). Cette courbe enveloppe les cordes d'un cercle fixe de rayon $3r$, appelé cercle directeur, dont une extrémité, dite point secondaire, progresse à partir du sommet à une vitesse double de l'autre, dite point primaire ; le point de contact est situé au tiers de la corde à partir du point primaire et la courbe est entièrement contenue dans le cercle directeur. Elle touche ce cercle en son sommet et le point de rebroussement est sur le cercle intérieur. La courbe a un axe de symétrie joignant le sommet et le point de rebroussement.
- une conchoïde de cercle à partir d'un de ses points, courbe obtenue en portant sur chaque corde tournant autour d'un point fixe du cercle intérieur un segment égal au diamètre de ce cercle de part et d'autre du point variable de la corde décrivant le cercle.
- une podaire de cercle à partir d'un de ses points, courbe telle qu'en chacun de ses points la perpendiculaire en ce point au segment qui le joint au point fixe du cercle soit tangente à ce cercle ; ce cercle a pour rayon $2r$ et pour centre le symétrique du point de rebroussement par rapport au centre des cercles intérieur et directeur de la cardioïde, il est inscrit dans la cardioïde, lui est tangent en son sommet et passe par le point de rebroussement.
- Toute corde de la courbe passant par le point de rebroussement a pour longueur $4r$ (cette propriété résulte de la définition de la conchoïde) et les tangentes aux 2 extrémités sont perpendiculaires et se coupent sur le cercle directeur de rayon $3r$.
- Il existe une bitangente à la cardioïde, perpendiculaire à son axe de symétrie à une distance $3r/2$ de son centre, du même côté que le point de rebroussement ; toute autre tangente coupe cette bitangente en un point K tel que KO trisecte l'angle entre la tangente et la bitangente (sur la figure 8, l'angle TKO est égal à $\theta/2$ et la droite KO est perpendiculaire au segment RU').

E) Parabole tangente aux 4 droites D_i et parabole associée

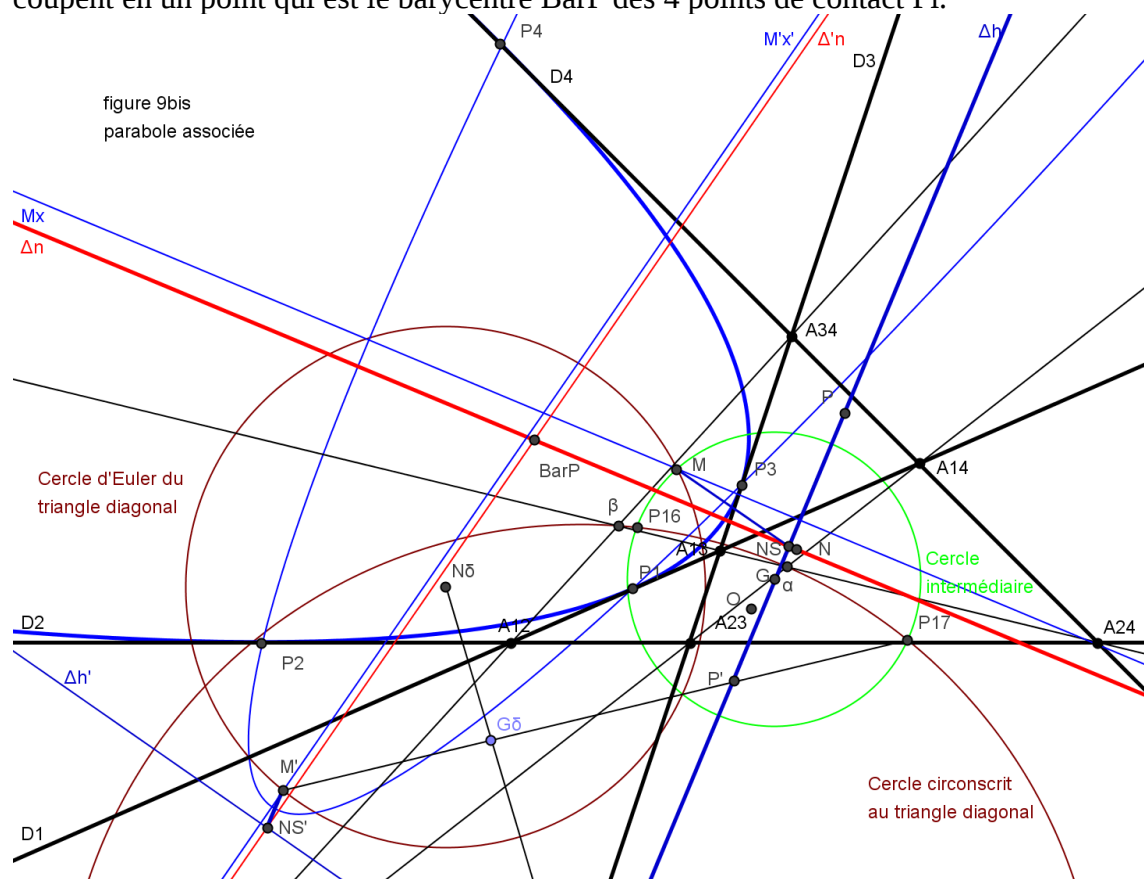
(cf C.A. van Tienhoven dans EQF)

figures 9 et 9bis

- Le point de Miquel M est le foyer de la parabole tangente aux 4 droites D_i .
- L'axe de la parabole est la parallèle à la droite de Newton Δ_n , appelée Mx .
- La droite Δ_h est la directrice de la parabole.
- p étant son paramètre, distance de M à Δ_h , p_i la distance de M à D_i et θ_i l'angle de D_i avec Δ_h , on a $p = 8r\Pi\cos\theta_i$ et $p_i = 4r\cos\theta_j\cos\theta_k\cos\theta_l = p/2\cos\theta_i$.
- P_0 est le sommet de la parabole, δ sa tangente en P_0 ; M_0 est le point d'intersection de l'axe Mx et de la directrice Δ_h et les 2 tangentes en M_0 sont perpendiculaires, les points de contact étant sur la perpendiculaire My à Mx à une distance p de M .
- Si l'on considère le triangle T_i constitué par 3 tangentes D_j, D_k et D_l , le foyer M est sur le cercle C_i circonscrit à T_i , la tangente au sommet δ et la directrice Δ_h étant les droites de Simson et de Steiner de M par rapport à T_i ; ceci justifie l'appartenance de M aux 4 cercles C_i .
- Les six droites joignant les milieux de deux côtés opposés sont tangentes à la parabole ; cette propriété se démontre aisément analytiquement (cf infra).
- Par les points d'intersection des D_i avec Δ_h , on peut mener 4 tangentes à la parabole D'_i perpendiculaires aux D_i .
- P_i est le point de contact de D_i avec la parabole ; P_i est sur la perpendiculaire en M_i à Δ_h . M_iM est perpendiculaire à D_i et les triangles P_iMM_i sont isocèles, les angles à la base étant égaux à θ_i . On a $MP_i = p_i / \cos\theta_i = p / 2 \cos^2\theta_i$ et, en effectuant le produit, $\Pi MP_i = p^4 / 16 (\Pi \cos\theta_i)^2 = 4 p^2 r^2$.
- P'_i est le point de contact de D'_i avec la parabole et $P_iP'_i$ passe par M ; P'_i se projette en M'_i sur Δ_h et le milieu de $M_iM'_i$ est le point d'intersection de D_i et D'_i situé sur Δ_h .



- Le segment qui joint les milieux des segments $A_{ij}P_i$ et $A_{ij}P_j$ est tangent à la parabole en son milieu, ce qui fournit 6 points supplémentaires de la parabole.
- BarP , l'isobarycentre des 4 points P_i , est sur Δ_n .
- La distance de M à Δ_n est $p_n = p/4 \sum \text{tg}\theta_i$.
- Au total, on a ainsi identifié 17 points de la parabole et leurs tangentes et 6 tangentes supplémentaires joignant les milieux des côtés opposés.
- C.A. van Tienhoven a introduit dans EQF un complément intéressant. Par les 4 points de tangence appelés P_i , il passe 2 paraboles circonscrites, la première étant la parabole tangente aux 4 droites D_i . La seconde a pour foyer un point du cercle d'Euler du triangle diagonal, appelé QL-P25 dans EQF, qui se construit comme le complément par rapport au triangle diagonal de l'un des 2 points d'intersection du cercle circonscrit au triangle diagonal et du cercle intermédiaire entre les cercles de Plücker et de Miquel ou Dimidium (cf partie C et figure 7). Elle a pour directrice la parallèle menée par le point $O\delta$, centre du cercle circonscrit au triangle diagonal, à la droite joignant le point de Miquel M au point de Newton-Steiner NS , point d'intersection des droites de Newton et de Steiner.
- La première et la seconde parabole sont appelées QL-Co1 et QL-Co3 dans EQF. Les tangentes à la seconde parabole aux points de contact P_i déterminent un second QC et les 2 QC ont même triangle diagonal, qui est aussi celui du quadrangle formé par les 4 points, ce qui détermine quelques belles propriétés symétriques. Les foyers des 2 paraboles sont sur le cercle d'Euler du triangle diagonal commun, les 2 directrices se coupent au centre du cercle circonscrit à ce triangle et la directrice de chacune des 2 paraboles est parallèle au segment joignant le point de Miquel au point de Newton-Steiner de l'autre QC (Δh est parallèle à NSM et $\Delta h'$ est parallèle à NSM') ; enfin, les 2 droites de Newton se coupent en un point qui est le barycentre BarP des 4 points de contact P_i .

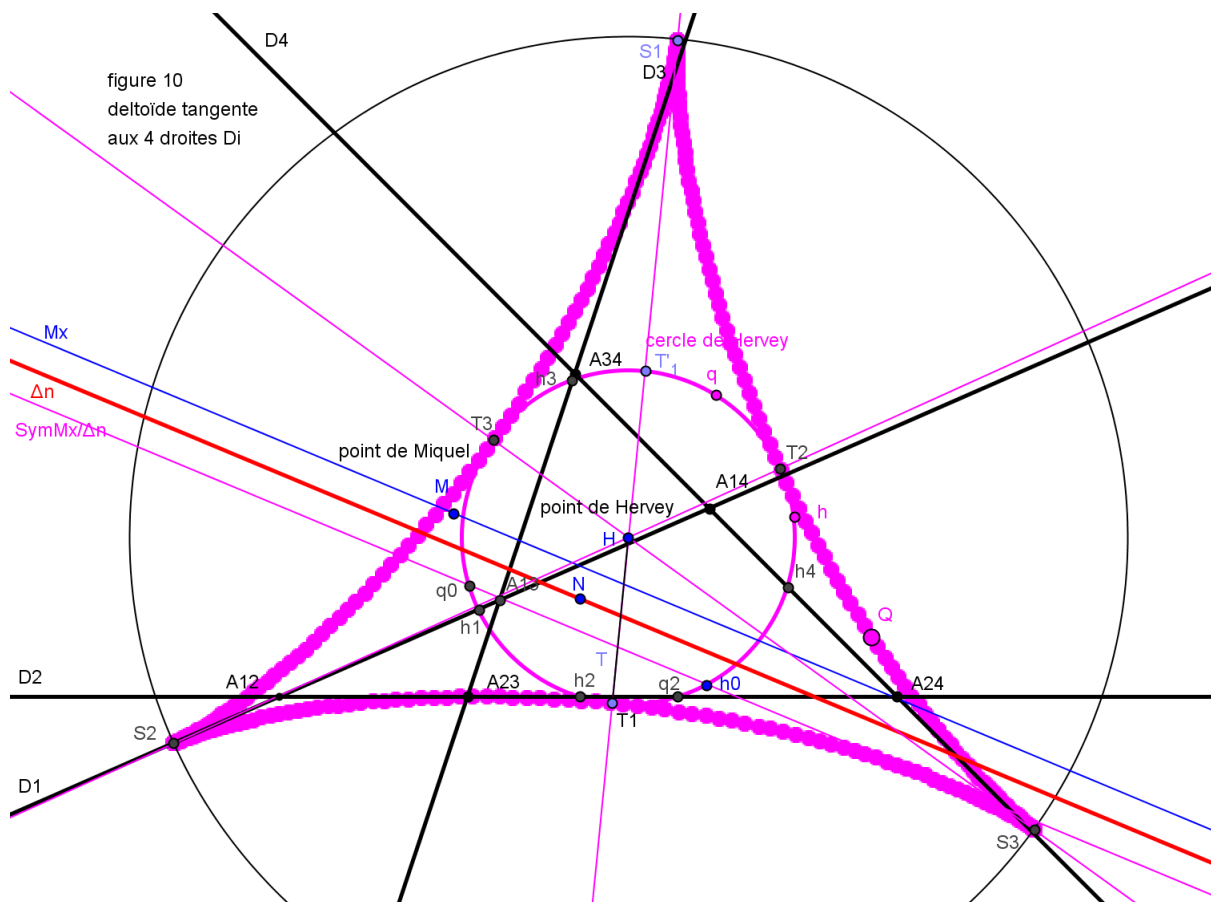


F) Deltoïde tangente aux 4 droites D_i
(cf Laguerre (6) et J. Lemaire (14))

figure 10

- On a vu que chaque D_i du QC peut être considérée comme une droite de Simson généralisée $D(\theta_i)$ du point M par rapport au triangle T_i , qui est, de ce fait, un triangle $T(\theta_i)$ de la H_3 tangente aux 4 D_i .
- H est le centre du cercle Γ de rayon r inscrit dans cette H_3 ; S_1, S_2 et S_3 sont les sommets de la H_3 (points de rebroussement) et T_1, T_2 et T_3 ses points de contact et de tangence avec son cercle inscrit. S_1T_1, S_2T_2 et S_3T_3 sont tangentes à la H_3 , se coupent en H et sont les axes de symétrie de la H_3 ; α_i est l'angle orienté, déterminé $m^\circ \pi/3, (S_1T_1, D_i)$.
- q_i est le point d'intersection autre que h_i de D_i avec le cercle inscrit dans la H_3 et Q_i , symétrique de q_i par rapport à h_i , est le point de contact de D_i avec la H_3 . h'_i est le point diamétralement opposé à h_i sur le cercle Γ et Q'_i est le symétrique de q_i par rapport à h'_i . On appelle d_i la droite $q_iQ'_i$, perpendiculaire en q_i à D_i , D'_i la droite $Q_iQ'_i$ et d'_i la perpendiculaire en q_i à D'_i ; d_i, D'_i et d'_i sont toutes trois des tangentes à la H_3 .
- On construit D_0 , la tangente à la H_3 parallèle à la directrice de la parabole ; on place d'abord le point h_0 symétrique de M par rapport à N et son symétrique h'_0 par rapport à H et on trace la tangente D_0 parallèle à la droite Mx (elle est symétrique de Mx par rapport à la droite de Newton et passe donc par h_0), qui recoupe le cercle inscrit dans la H_3 en q_0 : Q_0 est le symétrique par rapport à N du point m_0 où Mx recoupe le cercle (C) ; h_0q_0 est la tangente D_0 cherchée. Les points de contact Q_0 et Q'_0 de D_0 et d_0 avec la H_3 sont les symétriques de q_0 par rapport à h_0 et h'_0 et la droite $Q_0Q'_0$ est la tangente D'_0 à la H_3 ; elle est parallèle à OM et fait un angle $\sum \theta_i$ avec Mx et donc $\pi/2 + \sum \theta_i$ avec la directrice de la parabole. La perpendiculaire en q_0 à D'_0 est la tangente d'_0 à la H_3 , elle fait un angle $\sum \theta_i$ avec la directrice de la parabole.
- On peut montrer aisément que les 4 droites D_i répondent aux propriétés générales énoncées ci-dessus ; ce sont les symétriques menées par les points h_i à la direction de la directrice de la parabole Δh et les droites de Simson des points symétriques de q_0 par rapport à h_i pour le triangle $Q_0q_0Q'_0$.
- Les points de contact T_1, T_2 et T_3 de la H_3 avec son cercle inscrit Γ sont situés sur les arcs h_iq_i entre h_i et q_i au tiers à partir de h_i ; les sommets S_1, S_2 et S_3 sont situés sur un cercle de centre H et de rayon $3r$. Les droites S_1T_1, S_2T_2 et S_3T_3 sont tangentes à la H_3 , passent par H et sont les axes de symétrie de la H_3 .
- Les points T_1, T_2 et T_3 sont aussi situés sur l'arc h_0q_0 entre h_0 et q_0 au tiers à partir de h_0 ; or h_0 est le symétrique de M par rapport à N et h_0H est parallèle à MO et fait un angle $\sum \theta_i$ avec h_0q_0 . Du coup, les axes de symétrie de la H_3 font un angle de $1/3 \sum \theta_i$ ($m^\circ 2\pi/3$) avec Mx et de $\pi/2 + 1/3 \sum \theta_i$ avec la directrice de la parabole. On peut en outre préciser que $\theta_i = \pi/2 - (\alpha_j + \alpha_k + \alpha_l)$, $\sum \theta_i = -3 \sum \alpha_i$ et on a bien $\theta_i - \alpha_i = \pi/2 - \sum \alpha_i = \pi/2 + 1/3 \sum \theta_i$.
- Le corollaire du théorème de Laguerre est que la somme des angles des côtés d'un triangle principal de la H_3 avec la directrice de la parabole est égale à $1/3 \sum \theta_i$.

Tout le charme et le mystère des relations entre le QC et sa H_3 résident dans cette propriété, qui permet, à partir de D_0 et des 4 D_i , de construire un certain nombre de triangles principaux.



- On appelle D_{ij} , D_{jk} et D_{kl} les tangentes à la H_3 faisant respectivement des angles $\theta_i + \theta_j$, $\theta_k + \theta_l$ et $\sum \theta_j = \theta_j + \theta_k + \theta_l$; d_{ij} , d_{kl} et d_{jkl} sont les tangentes à la H_3 perpendiculaires à D_{ij} , D_{kl} et D_{jkl} . d_{ij} et d_{kl} sont les troisièmes tangentes à la H_3 en A_{ij} (autre que D_i et D_j) et en A_{kl} (autre que D_k et D_l); elles se coupent en un point symétrique de M par rapport au milieu μ_{ij} de $A_{ij}A_{kl}$ et appartenant donc à la tangente d_0 parallèle à l'axe de la parabole.
- D_i , D_j et D_{kl} forment un triangle principal de la H_3 , que l'on appellera T_{ij} ; d_i , d_j et d_{kl} en sont les 3 hauteurs. Le centre de son cercle circonscrit O_{ij} est l'intersection des perpendiculaires à $A_{ij}O_k$ et $A_{ij}O_l$ en O_k et O_l et son orthocentre H_{ij} est l'intersection des perpendiculaires à $A_{ij}H_k$ et $A_{ij}H_l$ en H_k et H_l . H est le milieu de $O_{ij}H_{ij}$ et le cercle Γ est le cercle d'Euler de T_{ij} , qui passe par les milieux des côtés h_i , h_j et h_{ij} , par les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets h'_i , h'_j et h'_{ij} et par les pieds des hauteurs q_i , q_j et q_{ij} . (Cette construction figure dans l'ouvrage de Lemaire).
- D_0 , D_{ij} et D_{kl} forment un triangle principal, que l'on appellera T_{0ij} .
- D_0 , D_i et D_{jkl} forment un triangle principal, que l'on appellera T_{0i} .
- On notera que le triangle équilatéral ayant ses côtés tangents au cercle intérieur de la H_3 aux points de contact T_1 , T_2 et T_3 est un triangle principal, ainsi du reste que tous les triangles isocèles ayant un sommet sur un axe de la H_3 et une base sur la tangente perpendiculaire à cet axe au point de contact avec le cercle intérieur.

- Enfin et surtout, on peut même construire des triangles principaux de la H3, que l'on appellera $T''i$, semblables aux triangles Ti du QC ; il suffit de considérer les tangentes à la H3 faisant des angles $\theta_j + 1/3 \theta_i$, $\theta_k + 1/3 \theta_i$ et $\theta_l + 1/3 \theta_i$ avec la directrice de la parabole.
- On appelle $T'i$ le triangle antimédian de $t'i$, qui est aussi l'homothétique de ti dans l'homothétie de centre $O'i$ et de rapport 2 ; $C'i$ est son cercle circonscrit, de centre O_i et de rayon $R = 2r$, $H'i$, symétrique de O_i par rapport à H et de $O'i$ par rapport à hi est son orthocentre et H est le centre de son cercle d'Euler Γ , de rayon r .
- $T'i$ est semblable à Ti dans la similitude si ; sa H3 de Steiner est donc semblable à celle de Ti et Γ est son cercle d'Euler. $T''i$ est semblable à $T'i$ et s'en déduit par une rotation de centre H et d'angle $-2/3 \theta_i$, notée π_i . $C''i$ est son cercle circonscrit, de rayon $R = 2r$ et de centre $O''i = \pi_i(O_i)$; H est le centre de son cercle d'Euler Γ .
- La H3 tangente à D_0 et aux 4 Di est la H3 de Steiner de $T''i$ et se déduit de celle de $T'i$ dans la rotation π_i .
- On note $s'i$ la similitude résultant de la combinaison de si et de π_i ; elle a pour angle $1/3 \theta_i$ et pour rapport $1/\cos\theta_i$. Pour déterminer son centre, il suffit de connaître les transformés de 2 segments.

Il reste à déterminer le centre ou point invariant de la similitude $s'i$ pour l'identifier complètement

- O_i est le centre invariant de la similitude si et se transforme en $O''i$ dans la rotation π_i ; N_i se transforme en H dans la similitude si et H est le centre invariant de la rotation π_i . Le centre invariant de la similitude $s'i$ est donc le pivot de la similitude qui transforme $O_i N_i$ en $O''i H$.
- On a $si(N) = s'i(N) = H$, $T''i = \pi_i(T'i) = \pi_i[si(Ti)] = s'i(Ti)$; il en découle que $H3 = \pi_i[si(H3ST(Ti))] = s'i(H3ST(Ti))$. On note que les 4 triangles de Morley des triangles $T''i$ ont leurs côtés parallèles, de direction $1/3 \sum \theta_i$ ($m^\circ \pi/3$), ce qui est bien sûr normal, car les 4 triangles $T''i$ ont la même H3ST, qui est la deltoïde étudiée. On note aussi que Di est une droite de Simson pour les triangles $T'i$ et $T''i$ et qu'elle est tangente à la H3ST de $T'i$ et à celle de $T''i$, qui est la deltoïde étudiée. (Dans toute homothétie de rapport 2, la droite Di de Steiner de ti devient une droite de Simson du triangle homothétique ; le choix de $O'i$ comme centre permet de trouver H comme centre du cercle d'Euler des triangles $T'i$ et $T''i$).
- A partir des 4 tangentes Di et des 6 points A_{ij} , on a construit la tangente D_0 parallèle à la directrice de la parabole, 12 tangentes di , $D'i$ et $d'i$, 12 tangentes D_{ij} et d_{ij} , 4 tangentes D_{jkl} et 12 tangentes déduites des 4 tangentes Di dans les similitudes $s'i$, ce qui représente au total 45 tangentes identifiées.
- A partir des 4 triangles Ti , on a construit 6 triangles principaux de la H3 de la forme T_{ij} ayant Di Dj et D_{kl} comme côtés, 3 triangles principaux T_{0ij} ayant D_0 , D_{ij} et D_{kl} comme côtés, 4 triangles principaux T_{0i} ayant D_0 , Di et D_{jkl} comme côtés et surtout 4 triangles principaux de la forme $T''i$, semblables aux triangles Ti dans les similitudes $s'i$. Ces 17 triangles principaux ont le même cercle d'Euler Γ et admettent la H3 considérée comme H3 de Steiner.

Kantor et Hervey faisant explicitement référence à la deltoïde pour démontrer la concurrence des médiatrices des segments d'Euler au point de Kantor-Hervey, cette deltoïde mérite le nom de deltoïde de Kantor-Hervey (QL-Qu2 de EQF).

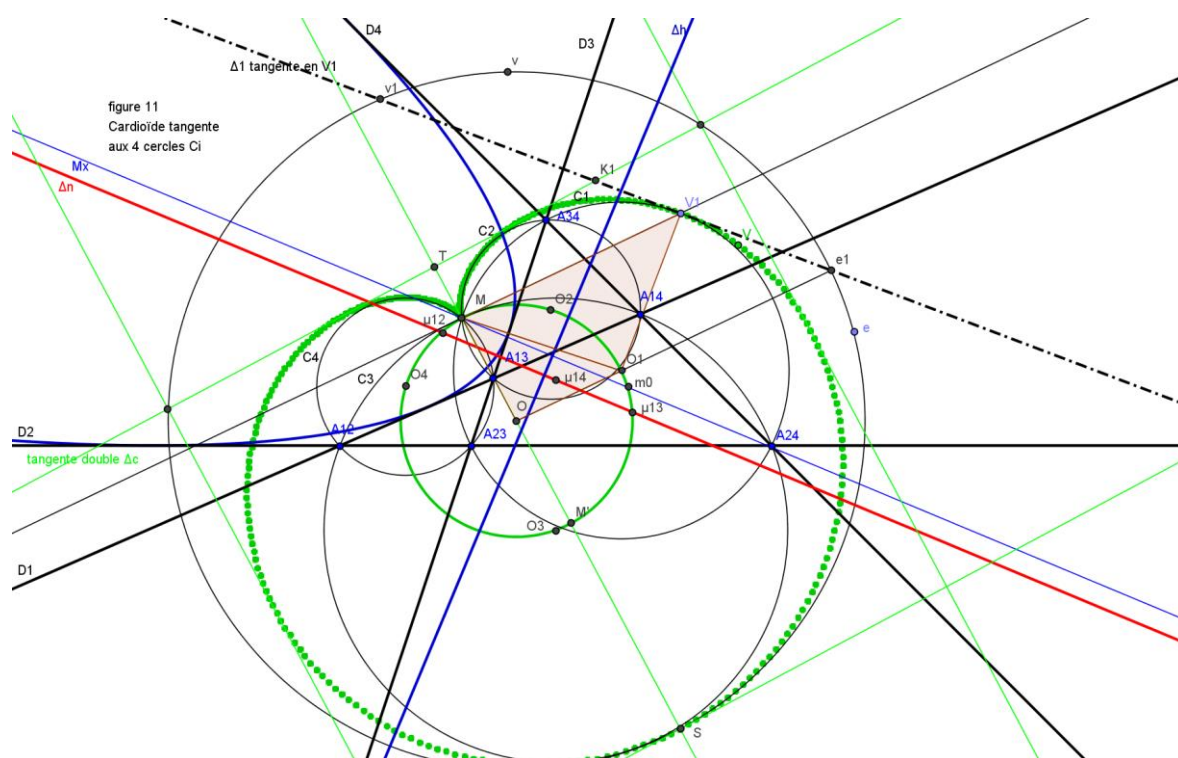
G) Cardioïde tangente aux 4 cercles C_i
(cf F. Morley (9) et A. Bogomolny (27))

figures 11 et 11bis

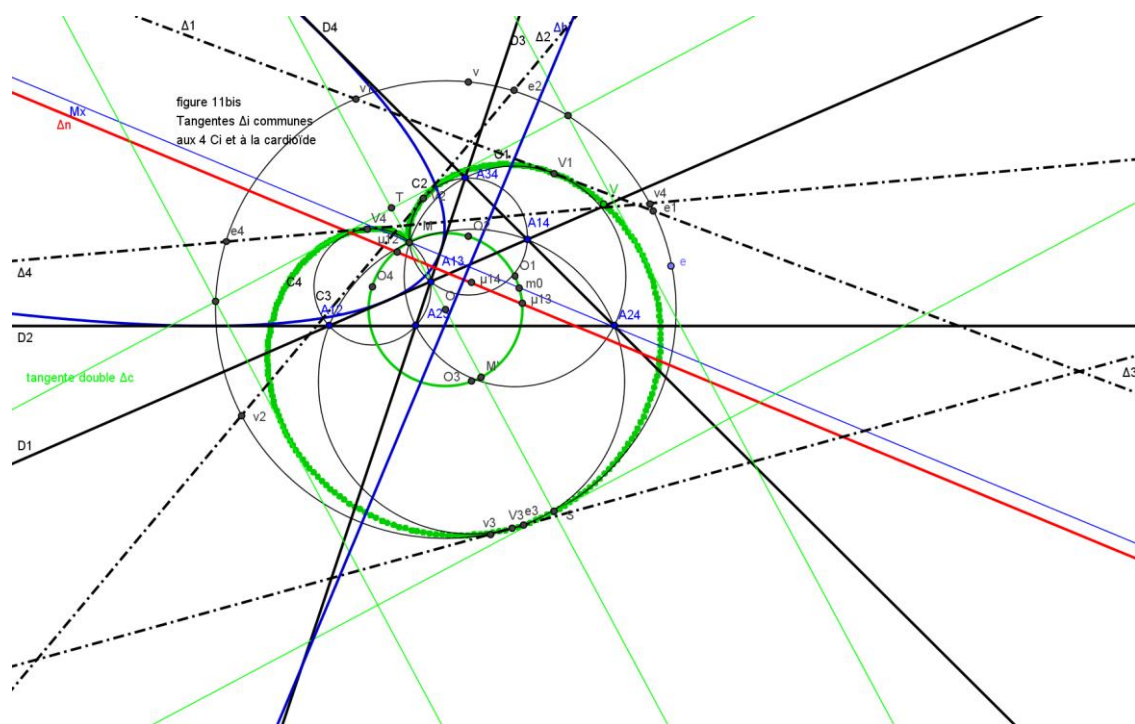
- On a vu précédemment que l'inversion de centre M et de rapport $2pr$ transformait le QC en un QC symétrique par rapport aux bissectrices de l'angle $(Mx; MO)$, dont la mesure est $\sum \theta_i$, les droites D_i et les cercles C_i échangeant leurs rôles.
- La cardioïde inverse dans cette inversion de la parabole symétrique de la parabole tangente aux 4 D_i par rapport aux axes de symétrie définis ci-dessus est tangente aux 4 cercles C_i ; elle admet M comme point de rebroussement, MO comme axe de symétrie, O comme centre du cercle intérieur de rayon r , qui est donc le cercle de Miquel (C) du QC et du cercle directeur de rayon $3r$, M' symétrique de M par rapport à O comme centre du cercle inscrit de rayon $2r$ et Sc , symétrique de M par rapport à M' comme sommet (on a donc $MSc = 2MM' = 4MO = 4r$).

La parabole tangente aux 4 D_i et la cardioïde tangente aux 4 C_i sont conjuguées dans la transformation Clawson-Schmidt (QL-Co1 et QL-Qu1 de EQF)

- On retrouve ainsi une nouvelle définition de la cardioïde comme enveloppe des cercles centrés sur un cercle fixe (ici le cercle de Miquel de centre O et rayon r) et passant par un point fixe de ce cercle (ici le point de Miquel M, foyer de la parabole et point de rebroussement de la cardioïde).
- La cardioïde passe par 2 points de la perpendiculaire à MO en M situés à une distance de $2r$ de part et d'autre M et les tangentes en ces points sont perpendiculaires et se coupent sur le cercle directeur ; la tangente double, perpendiculaire à MO à une distance $r/2$ recoupe le cercle directeur en 2 points d'où partent 2 tangentes parallèles à MO.



- Les points de contact V_i avec les C_i sont les symétriques de M par rapport aux tangentes au cercle (C) aux points O_i ; MV_i est parallèle à OO_i . Les points primaires e_i sont les homothétiques des points O_i dans l'homothétie de centre O et de rapport 3 ; la distance de O à la tangente Δ_i est $3r \cos\theta_i$, celle de O_i à la même droite est $O_iV_i = O_iM = 2r \cos\theta_i$, $MV_i = 4r \cos^2\theta_i$ et la distance de M à Δ_i est $4r \cos^3\theta_i$. V_i et les sommets du triangle T_i forment dans le cercle C_i un QI semblable au QI formé dans le cercle de Miquel par les O_i ; on a $Si(T_i) = ti$ et $Si(V_i) = Oi$
- La propriété de base de la cardioïde est que la tangente double Δ_c perpendiculaire à l'axe de symétrie au point T situé à une distance $3r/2$ du centre O (du même côté que le point de rebroussement R) coupe chaque tangente simple en un point K tel que KO trisecte l'angle entre la tangente double et cette tangente simple, KO étant la médiatrice du segment joignant le point de rebroussement au point de contact entre le cercle fixe et le cercle variable. Par construction, les tangentes à la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i sont les droites Δ_i , tangentes aux cercles C_i aux points V_i ; elles coupent la tangente double Δ_c en 4 points K_i tels que K_iO est la trisectrice de l'angle $\angle K K_i V_i$ et la médiatrice de MO_i .
- Réciproquement, si on connaît 4 tangentes Δ_i aux points V_i à une cardioïde de centre O et de point de rebroussement M , on trouve les points K_i comme intersections des droites Δ_i avec la tangente double Δ_c et les symétriques du point de rebroussement M par rapport aux droites K_iO sont les points O_i situés sur le cercle (C) de centre O passant par M et centres des cercles C_i passant par M et tangents à la cardioïde et aux droites Δ_i aux points V_i . Les intersections de ces 4 cercles forment un QC qui admet M comme point de Miquel et le cercle (C) comme cercle de Miquel ...
- L'identification d'une cardioïde tangente aux 4 droites D_i (centre et point de rebroussement) se ramène ainsi à la détermination de 4 droites δ_i qui joueraient, pour les 4 droites D_i formant le QC d'origine le même rôle que les D_i pour les Δ_i .

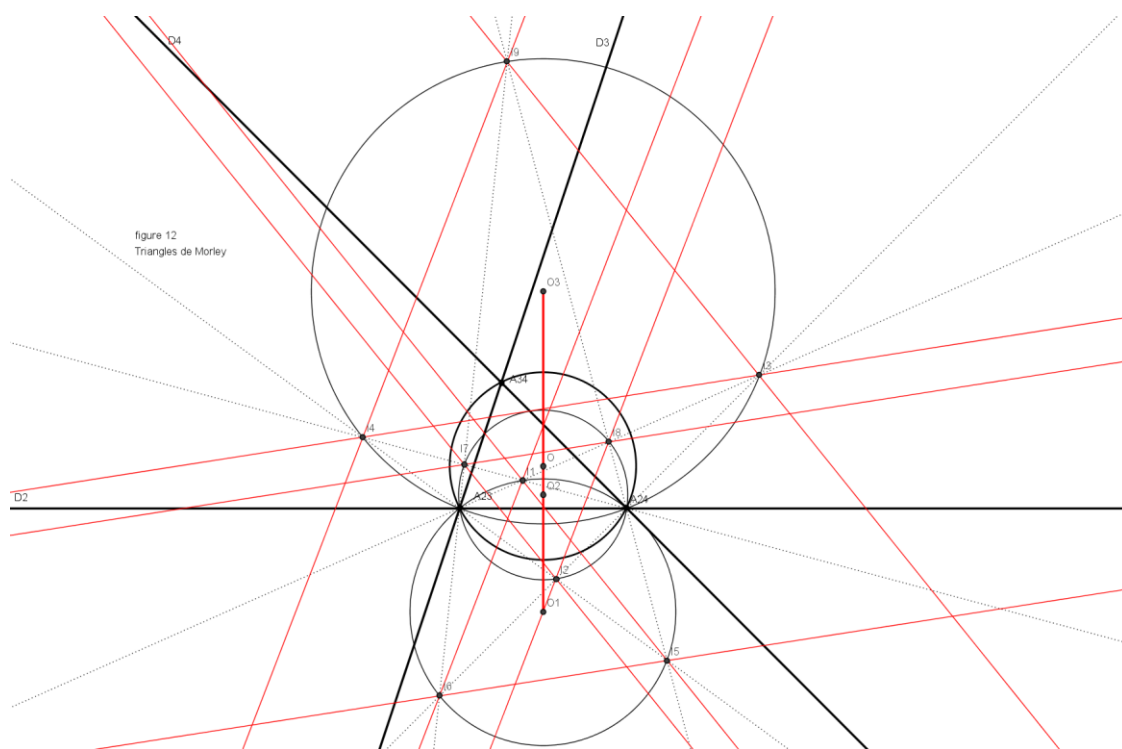


H) Triangles de Morley

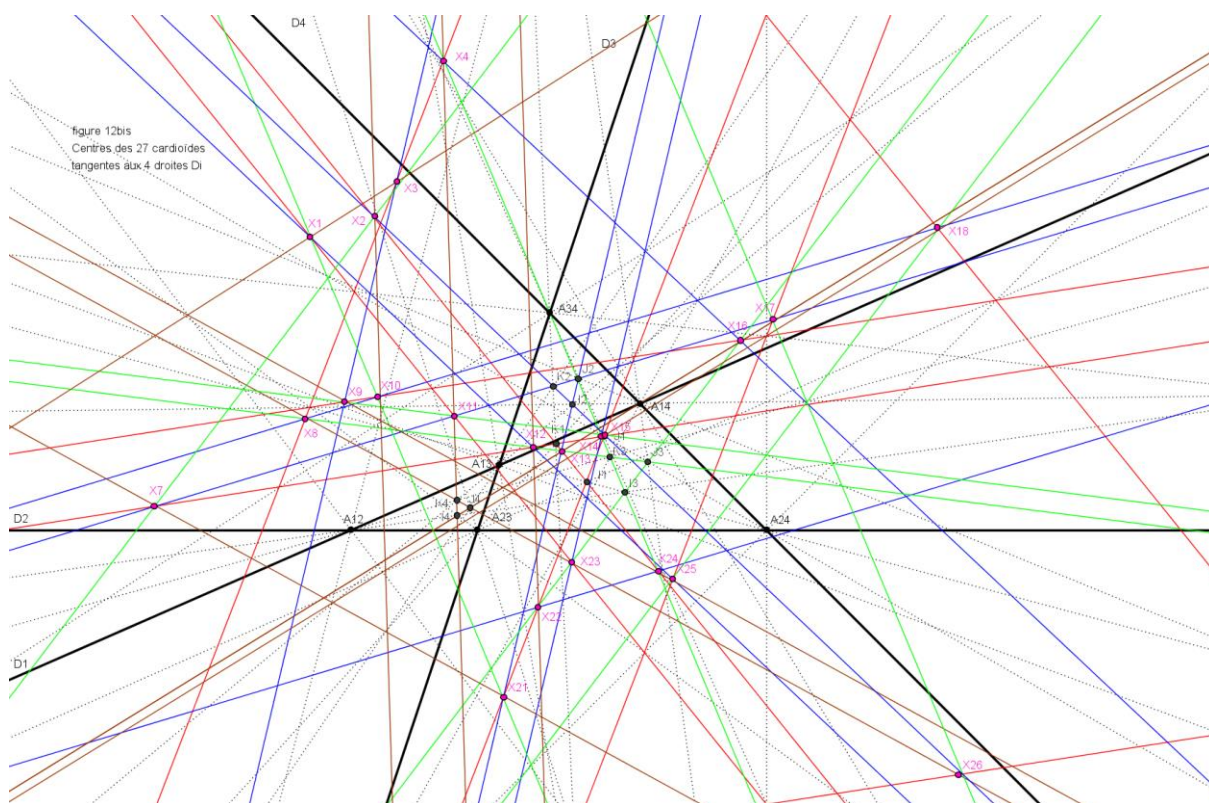
(cf F. Morley (9), R . Bricard (19) et A. Viricel (26))

figures 12 et 12bis

- On sait que Frank Morley a trouvé son merveilleux théorème sur les trisectrices en étudiant les cardioïdes. On a vu précédemment que chaque cardioïde admet une bitangente et que chaque tangente ordinaire coupe cette bitangente en un point tel que la droite joignant ce point au centre est une trisectrice de l'angle fait par la tangente avec la bitangente. Le lieu des centres des cardioïdes tangentes aux 3 côtés d'un triangle est un maillage de $3 \times 3 = 9$ droites, appelées axes du triangle et dont les directions sont celles des triangles de Morley et sont parallèles à la direction moyenne des 3 côtés $m^\circ \pi/3$. Ces droites déterminent 27 triangles équilatéraux et si le centre est situé en l'un des sommets, la cardioïde admet un des côtés du triangle comme tangente double, perpendiculaire à son axe de symétrie.
- Pour préciser leur emplacement pour un triangle ABC donné, on commence par tracer les trisectrices intérieures de chacun des angles en A, B et C. Le premier triangle équilatéral principal de Morley a pour sommets les 3 points I1, J1 et K1 intersections des trisectrices intérieures adjacentes aux côtés. On considère ensuite les centres I des cardioïdes bitangentes au côté BC. B étant sur la bitangente et sur une tangente simple BA, BI trisecte l'angle en B et de même CI l'angle en C. Les points I cherchés sont par construction les intersections de l'une des 3 trisectrices de l'angle B avec l'une des 3 trisectrices de l'angle C ; il y a donc 9 points I, alignés 3 à 3 sur chacune des 6 trisectrices (chaque point étant compté 2 fois).
- Pour fixer les idées, on a appelé I1 l'intersection des 2 trisectrices intérieures les plus proches du côté BC et I2 l'intersection des 2 trisectrices extérieures des angles B et C, là aussi les plus proches du côté BC.



- On a $\angle I_1BC = 1/3 \angle ABC$ et $\angle I_2BC = 1/3 \angle ACB$, $\angle I_2BC = 1/3(\pi - \angle ABC)$, $\angle I_2CB = 1/3(\pi - \angle ACB)$ et $\angle I_2BI_1 = \angle I_2CI_1 = \pi/3$; on met ainsi en évidence les propriétés suivantes concernant les 9 points I_1 à I_9 :
 - ils sont alignés 3 à 3 sur 3 trisectrices de B ($BI_1I_3I_8$, $BI_2I_4I_5$ et $BI_6I_7I_9$) et 3 trisectrices de C ($CI_1I_4I_7$, $CI_2I_3I_6$ et $CI_5I_8I_9$)
 - ils sont 3 par 3 les sommets de 3 triangles équilatéraux ($I_1I_5I_6$, $I_2I_7I_8$ et $I_3I_4I_9$) inscrits dans 3 cercles qui passent par B et C ; les centres de ces cercles sont alignés sur la médiatrice de BC et le centre de gravité des 9 points est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
 - ces 3 triangles équilatéraux ont leurs côtés parallèles 3 à 3 (I_3I_4 , I_5I_6 et I_7I_8 , I_1I_6 , I_2I_8 et I_4I_9 I_1I_5 , I_2I_7 et I_3I_9) ; ils se déduisent les uns des autres dans des similitudes de centres B ou C et d'angles $\pm \pi/3$.
 - Chacun des points I_1 à I_9 est le centre d'une cardioïde bitangente au côté BC ; le point de rebroussement est aux $2/3$ de la distance de I à BC.
- Au total, en considérant les 3 côtés BC, AB et AC, on met en évidence les 27 points sommets de 27 triangles équilatéraux, qui constituent le maillage de Morley ; ils sont alignés 6 par 6 sur chacune des $3 \times 3 = 9$ droites, chacun étant à l'intersection de 2 droites.
- En théorie, pour le QC, pour qu'une cardioïde soit tangente aux 4 triangles T_i , il faut que son centre soit sur une des intersections des 4 maillages, ce qui devrait représenter 81 points possibles. En pratique, il y a 27 points d'intersection, chaque point se situant à l'intersection de 4 droites (1 par maillage) et chacune des 36 droites portant 3 points. Eckart Schmidt, membre du groupe Quadrifigures, a prouvé que ces 27 points appartiennent à une cubique, dont les axes parallèles à ceux de la deltoïde se coupent au point de Miquel.



I) Cardioïdes tangentes aux 4 droites Di

figure 13

(cf F. Morley (9), Sister Mary Gervase (16) et Général Marmion (25))

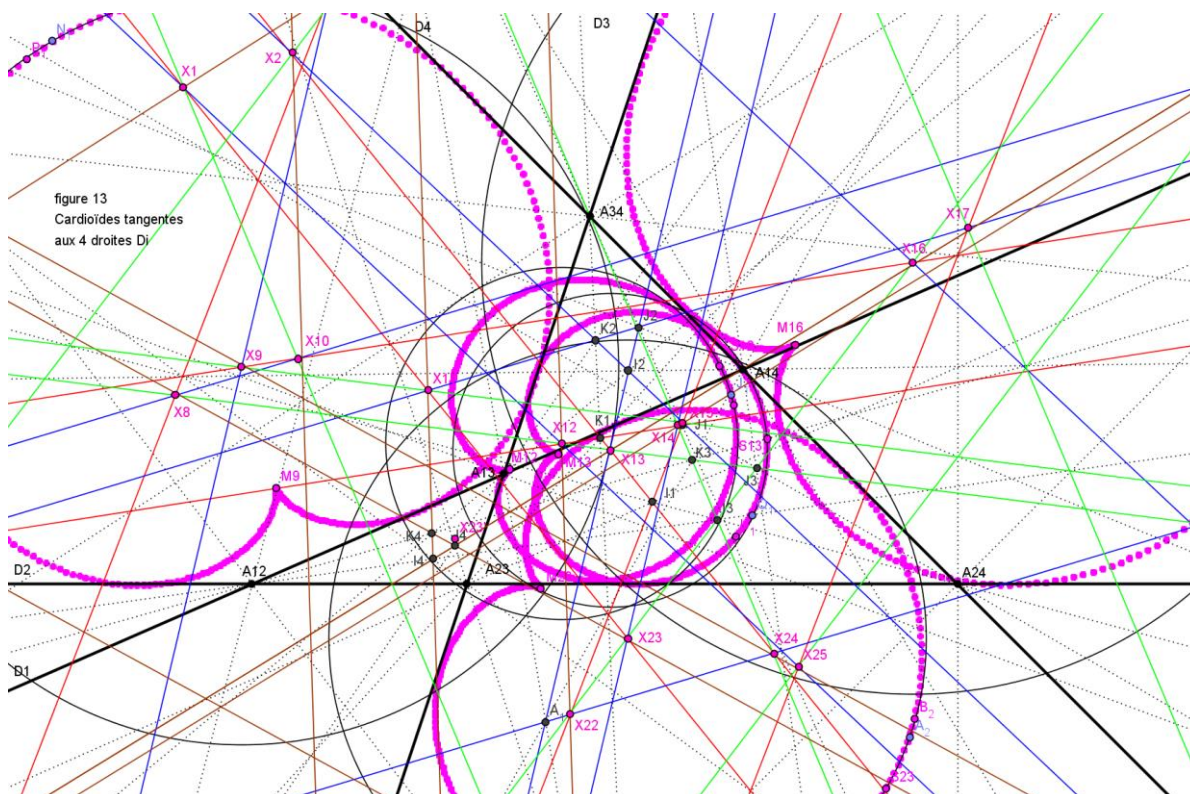
- Pour une deltoïde de centre O, les points primaires h_i sont situés sur le cercle directeur de telle sorte que $(O h_i ; O h_j) = 2 (D_i ; D_j)$ et il n'y a qu'une forme de quadrilatère de sommets h_i , les angles entre les côtés étant égaux à $(D_i ; D_j)$. Pour une cardioïde de centre O, les points primaires e_i sont disposés sur le cercle directeur de telle manière que $(O e_i ; O e_j) = 2/3 (D_i ; D_j) \text{ m}^\circ \pi/3$. A partir d'un ensemble de 4 droites D_i , on peut choisir parmi 3 valeurs possibles pour 3 des 4 angles et il y a donc 27 quadrilatères inscrits de sommets e_i de formes différentes, les angles entre les côtés étant égaux à $1/3 (D_i ; D_j) \text{ m}^\circ \pi/3$.

Or il n'existe qu'une manière d'inscrire un quadrilatère de forme donnée dans un ensemble de 4 droites données (avec un sommet sur chaque droite).

- Pour la deltoïde, le lieu du centre est, pour un triangle donné, la médiatrice d'Euler et, pour le QC, ces 4 médiatrices sont concourantes, ce qui constitue le théorème de Kantor-Hervy. Pour la cardioïde, ce lieu est, pour un triangle donné, le maillage de Morley et, pour le QC, l'intersection de ces 4 maillages, constituée des 27 points appartenant à la conique identifiée par Eckart Schmidt.

Il y a 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites Di d'un QC (QL-27Qu1 de EQF).

- On a représenté sur la figure 13 les cardioïdes de centres X9, X12, X13, X16 et X23. Les droites D_i sont orientées comme pour la deltoïde pour la cardioïde de centre X12 et comme pour la parabole pour celle de centre X9. Pour celles de centres X13 et X16, il faut inverser respectivement le sens de D_1 ou de D_4 ; enfin, pour celle de centre X23, il faut inverser à la fois le sens de D_1 et de D_2 ...



J) Coordonnées cartésiennes

figure 14

- On s'intéresse à la parabole et à la deltoïde tangentes aux 4 droites D_i et à la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i . On traitera d'abord chaque courbe dans un repère approprié, puis on essaiera de retrouver analytiquement les liens entre les centres de ces courbes (foyer M de la parabole, centre H du cercle inscrit dans la deltoïde et centre O des cercles intérieur et directeur). Pour la parabole et la deltoïde, on peut bien sûr commencer par l'une ou l'autre des courbes et considérer l'autre comme tangente à 4 droites tangentes à la première ; on a choisi, comme Bickart et Liénard, d'identifier la deltoïde tangente aux 4 droites tangentes à une parabole donnée, mais J. Lemaire et F. Morley identifient la parabole tangente à 4 tangentes à une $H3$ donnée.
- On commence par établir un certain nombre de relations utiles pour la suite :
 - $\cos\theta_i = \cos\theta_i$
 - $\sin\theta_i = \cos\theta_i * \tan\theta_i$
 - $\cos(\theta_i + \theta_j) = \cos\theta_i * \cos\theta_j (1 - \tan\theta_i * \tan\theta_j)$
 - $\sin(\theta_i + \theta_j) = \cos\theta_i * \cos\theta_j (\tan\theta_i + \tan\theta_j)$
 - $\cos(\sum\theta_j) = \prod\cos\theta_j (1 - \sum\tan\theta_j * \tan\theta_k)$
 - $\sin(\sum\theta_j) = \prod\cos\theta_j (\sum\tan\theta_j - \prod\tan\theta_j)$
 - $\cos(\sum\theta_i) = \prod\cos\theta_i (1 - \sum\tan\theta_i * \tan\theta_j + \prod\tan\theta_i)$
 - $\sin(\sum\theta_i) = \prod\cos\theta_i (\sum\tan\theta_i - \sum\tan\theta_i * \tan\theta_j * \tan\theta_k)$
 - $\sum\cos(\theta_i + \theta_j + \theta_k - \theta_l) = 4 \prod\cos\theta_i (1 - \prod\tan\theta_i)$
 - $\sum\sin(\theta_i + \theta_j + \theta_k - \theta_l) = 2 \prod\cos\theta_i (\sum\tan\theta_i + \sum\tan\theta_i * \tan\theta_j * \tan\theta_k)$
 - avec $\sum\theta_i = \theta_i + \theta_j + \theta_k + \theta_l$ et $\sum\theta_j = \theta_j + \theta_k + \theta_l$, on a $\sum\theta_i = \theta_i + \sum\theta_j$
 - avec $\sum\tan\theta_i = \tan\theta_i + \tan\theta_j + \tan\theta_k + \tan\theta_l$ et $\sum\tan\theta_j = \tan\theta_j + \tan\theta_k + \tan\theta_l$ et $\prod\tan\theta_i = \tan\theta_i * \tan\theta_j * \tan\theta_k * \tan\theta_l$ et $\prod\tan\theta_j = \tan\theta_j * \tan\theta_k * \tan\theta_l$, on a $\sum\theta_i = \theta_i + \sum\theta_j$, $\sum\tan\theta_i * \tan\theta_j = \tan\theta_i * \sum\tan\theta_j + \sum\tan\theta_j * \tan\theta_k$, $\sum\tan\theta_i * \tan\theta_j * \tan\theta_k = \tan\theta_i * \sum\tan\theta_j * \tan\theta_k + \prod\tan\theta_j$ et $\prod\tan\theta_i = \tan\theta_i * \prod\tan\theta_j$.
- On prend comme origine le point de Miquel M , foyer de la parabole, comme axe des abscisses l'axe de symétrie de la parabole Mx (parallèle en M à la droite de Newton) et comme axe des ordonnées la parallèle My en M à la directrice Δh de la parabole (droite des orthocentres de Steiner-Miquel).
- L'équation cartésienne de la parabole ayant pour foyer M l'origine et pour directrice Δh la droite $x = p$ est $x^2 + y^2 = (p-x)^2$ ou $y^2 = -2px + p^2$; la parabole a pour sommet le point $(p/2 ; 0)$ et passe par les 2 points $(0 ; p)$ et $(0 ; -p)$.
- L'équation paramétrique de la parabole s'écrit en abscisse $x = p \cos t / (1 + \cos t)$ et en ordonnée $y = p \sin t / (1 + \cos t)$; son équation polaire est $\rho = p / (1 + \cos t)$.
- L'équation de la tangente en un point P_i de coordonnées $(x ; y)$ et de pente k est $y = kx - p/2 (k + 1/k)$.
- L'équation des 4 droites D_i tangentes à la parabole et de pente $-1/\tan\theta_i$ s'écrit alors, selon les besoins, $y = -1/\tan\theta_i x + p/\sin 2\theta_i$, $x + y \tan\theta_i - p/2 (1 + \tan^2\theta_i) = 0$ ou encore $x \cos\theta_i + y \sin\theta_i - p/2 \cos\theta_i = 0$ ou $x(1 + \cos 2\theta_i) + y \sin 2\theta_i = p$.

- Les coordonnées des points A_{ij} sont $[p/2 (1 - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j) ; p/2 (\operatorname{tg}\theta_i + \operatorname{tg}\theta_j)]$, qui se met sous la forme $[p \cos (\theta_i + \theta_j) / 2 \cos \theta_i \cos \theta_j ; p \sin (\theta_i + \theta_j) / 2 \cos \theta_i \cos \theta_j]$.
- Les milieux μ_{ij} , μ_{ij} et μ_{ij} des diagonales $A_{ij}A_{kl}$, $A_{ik}A_{jl}$ et $A_{il}A_{jk}$ ont pour coordonnées $[p/4 (2 - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j - \operatorname{tg}\theta_k \operatorname{tg}\theta_l) ; p/4 \sum \operatorname{tg}\theta_i]$, les 2 autres s'en déduisant en permutant d'abord j et k , ensuite j et l ; les 3 milieux sont alignés sur la droite de Newton, d'équation $y = p/4 \sum \operatorname{tg}\theta_i$.
- L'isobarycentre des 6 points A_{ij} , qui est aussi celui des 3 milieux des diagonales μ_{ij} , a pour coordonnées $[p/12 (6 - \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j) , p/4 \sum \operatorname{tg}\theta_i]$.
- Le milieu du côté $A_{ik}A_{il}$ a pour coordonnées $[p/4 (2 - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_k - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_l) ; p/4 (2 \operatorname{tg}\theta_i + \operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)]$ et les milieux des segments $A_{ik}A_{il}$ et $A_{jk}A_{jl}$ sont sur la droite d'équation $x + y [\frac{1}{2} (\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)] - p/2 [1 + \frac{1}{4} (\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)^2] = 0$, tangente à la parabole faisant avec la directrice un angle de $\frac{1}{2} (\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)$.
- La perpendiculaire à D_j par le milieu de $A_{ik}A_{il}$ a pour pente $\operatorname{tg}\theta_j$ et pour équation $y - p/4 (2 \operatorname{tg}\theta_i + \operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l) = \operatorname{tg}\theta_j [x - p/4 (2 - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_k - \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_l)]$; les perpendiculaires à D_i par le milieu de $A_{jk}A_{jl}$ et à D_j par le milieu de $A_{ik}A_{il}$ se coupent sur la directrice Δ_h au milieu de H_kH_l , dont les coordonnées s'écrivent aisément $[p ; p/4 [2 (\operatorname{tg}\theta_i + \operatorname{tg}\theta_j) + (1 + \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j) (\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)]$.
- Dans le triangle T_i , la médiatrice de $A_{jk}A_{jl}$ a pour pente $\operatorname{tg}\theta_j$ et son équation s'écrit $y = x \operatorname{tg}\theta_j + p/4 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_j) (\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l)$; le point O_i a pour coordonnées $[p/4 (1 - \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k - \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_l - \operatorname{tg}\theta_k \operatorname{tg}\theta_l) ; p/4 (\sum \operatorname{tg}\theta_j - \Pi \operatorname{tg}\theta_j)]$. Ceci peut s'écrire, en posant $R_i = p/4 \Pi \cos \theta_j$, sous la forme $[R_i \cos (\sum \theta_j) ; R_i \sin (\sum \theta_j)]$.
- On note au passage que pour un triangle T_i donné O_i est fixe et R_i connu ; le lieu de M , foyer des paraboles tangentes aux 3 côtés du triangle est le cercle C_i circonscrit au triangle T_i . Pour un QC donné, M appartient aux 4 cercles C_i .
- Le milieu o_i de MO_i a pour coordonnées $[p/8 \cos (\sum \operatorname{tg}\theta_j) ; p/8 \sin (\sum \operatorname{tg}\theta_j)]$ et la pente de MO_i est $\operatorname{tg} (\sum \operatorname{tg}\theta_j)$; les médiatrices des segments MO_i passent par le point O , de coordonnées $[p/8 (1 - \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j + \Pi \operatorname{tg}\theta_i) ; p/8 (\sum \operatorname{tg}\theta_i - \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k)]$. Ceci peut s'écrire, en posant $r = p/8 \Pi \cos \theta_i$, $[r \cos (\sum \theta_i) ; r \sin (\sum \theta_i)]$. M et les points O_i sont sur un cercle C de centre O et de rayon r .
- Dans le triangle T_i , la hauteur issue de A_{kl} a pour pente $\operatorname{tg}\theta_j$ et son équation s'écrit $y = x \operatorname{tg}\theta_j + p/2 [\operatorname{tg}\theta_k + \operatorname{tg}\theta_l - \operatorname{tg}\theta_j (1 - \operatorname{tg}\theta_k \operatorname{tg}\theta_l)]$; le point H_i a pour coordonnées $[p ; p/2 (\sum \operatorname{tg}\theta_j + \Pi \operatorname{tg}\theta_j)]$ et les points H_i sont alignés sur la directrice de la parabole d'équation $x = p$.
- Le point G_i a pour coordonnées $[p/6 (3 - \sum \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k) ; p/3 \sum \operatorname{tg}\theta_j]$ et on vérifie qu'il est bien l'isobarycentre des points A_{jk} , A_{jl} et A_{kl} ; on vérifie même que l'isobarycentre des points G_i est le point B , isobarycentre des 6 points A_{ij} .
- Le point N_i a pour coordonnées $[p/8 (5 - \sum \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k) ; p/8 (3 \sum \operatorname{tg}\theta_j + \Pi \operatorname{tg}\theta_j)]$.
- On calcule enfin la pente de O_iH_i $(\sum \operatorname{tg}\theta_j + 3 \Pi \operatorname{tg}\theta_j) / (3 + \sum \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k)$ et l'équation de la médiatrice de O_iH_i ; elle passe par le point H , de coordonnées $[p/8 (5 - \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j - 3 \Pi \operatorname{tg}\theta_i) ; p/8 (3 \sum \operatorname{tg}\theta_i + \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k)]$.
- On vérifie que ce point est l'orthocentre du quadrilatère inscrit formé par les O_i .
- Les coordonnées du point H' sont $[p ; p/8 (3 \sum \operatorname{tg}\theta_i + \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j \operatorname{tg}\theta_k)]$; on vérifie d'abord que H' est l'isobarycentre des points H_i et ensuite que B est l'isobarycentre des points O , N et H' .
- On peut calculer la pente de NiH' , égale à $\operatorname{tg}\theta_i$, et vérifier ainsi que NiH' est perpendiculaire à D_i .
- Enfin, si O_iH_i est parallèle à D_i , on trouve $3 (1 + \Pi \operatorname{tg}\theta_i) + \sum \operatorname{tg}\theta_i \operatorname{tg}\theta_j = 0$. Cette formule étant symétrique, la propriété est vraie pour les 4 segments O_iH_i , parallèles aux 4 droites D_i et on vérifie, dans ce cas, que H et H' sont confondus.

- L'équation d'une hypocycloïde à 3 rebroussements ou H3, appelée deltoïde, s'établit dans un repère ayant pour origine le centre du grand cercle de rayon $3r$ en ajoutant les coordonnées du centre du petit cercle de rayon r roulant dans le grand ($2r\cos t$; $2r\sin t$) et celles d'un point fixe du petit cercle variable dans le repère ayant pour origine son centre ($r\cos 2t$; $-r\sin 2t$) ; quand son centre a tourné d'un angle t , le petit cercle a tourné d'un angle égal à t ($3r - r$) / $r = 2t$.
- On note au passage que cette formulation simple fait apparaître la double génération de Crémona, car on obtient la même courbe, décrite en sens inverse, en faisant tourner un cercle de rayon $2r$ dans le cercle de rayon $3r$; quand son centre a tourné d'un angle $2t$, le cercle a tourné d'un angle $2t$ ($3r - 2r$) / $2r = t$.
- L'équation paramétrique classique de la H3 s'écrit donc $x = r(2\cos t + \cos 2t)$ et $y = r(2\sin t - \sin 2t)$ et son équation polaire $\rho^2 = r^2(5 + 4\cos 3t)$; la courbe passe par les points identifiés S1 ($3r$; 0) pour $t = 0$, T3 ($r/2$; $r\sqrt{3}/2$) pour $t = \pi/3$, ($-r$; $2r$) pour $t = \pi/2$, S2 ($-3r/2$; $3r\sqrt{3}/2$) pour $t = 2\pi/3$, T1 ($-r$; 0) pour $t = \pi$; elle a 3 points de rebroussement S1, S2 et S3 sur le cercle de centre H et de rayon $3r$ et elle est tangente au cercle intérieur de centre H et rayon r en trois points T1, T2 et T3. S1T1, S2T2 et S3T3 sont 3 axes de symétrie et se coupent en H.
- L'équation de la tangente s'écrit $x' = -2r(\sin t + \sin 2t) = -4r\sin 3t/2\cos t/2$ et $y' = 2r(\cos t - \cos 2t) = 4r\sin 3t/2\sin t/2$ et, en reportant les valeurs de x et y , il vient $[x - r(2\cos t + \cos 2t)]\sin t/2 + [y - r(2\sin t - \sin 2t)]\cos t/2 = 0$. En simplifiant et en posant $t = 2\theta$, il vient classiquement $x\sin\theta + y\cos\theta = r\sin 3\theta$. Sous cette forme, on peut montrer 2 propriétés intéressantes :
 - la tangente coupe le cercle inscrit dans la H3 en 2 points h et q , de coordonnées ($r\cos t$; $r\sin t$) et ($-r\cos 2t$; $r\sin 2t$) et le point de contact avec la H3 est Q de coordonnées $[r(2\cos t + \cos 2t)$; $r(2\sin t - \sin 2t)$]. Si l'on appelle T le point de tangence du cercle inscrit avec la H3, on vérifie que (HT , Hh) = t et (HT , Hq) = $-2t$ (génération de Crémona) et que Q est le symétrique de q par rapport à h .
 - Par ailleurs, la tangente perpendiculaire à la première tangente a pour équation $x\cos\theta - y\sin\theta = r\cos 3\theta$ et le lieu des points d'où on peut mener 2 tangentes perpendiculaires est le cercle inscrit, d'équation $x^2 + y^2 = r^2$.
- Avec un axe de la H3 parallèle à l'axe des ordonnées, l'équation deviendra $x\cos\theta + y\sin\theta = r\cos 3\theta$ et, dans un repère quelconque, elle s'écrit $(x - x_H)\cos\theta + (y - y_H)\sin\theta = r\cos(3\theta - \varphi)$, x_H et y_H étant les coordonnées du centre H de la H3, r le rayon du cercle inscrit dans la H3 et φ (défini $m^\circ \pi/3$) l'angle entre l'axe des abscisses et les axes de symétries de la H3.

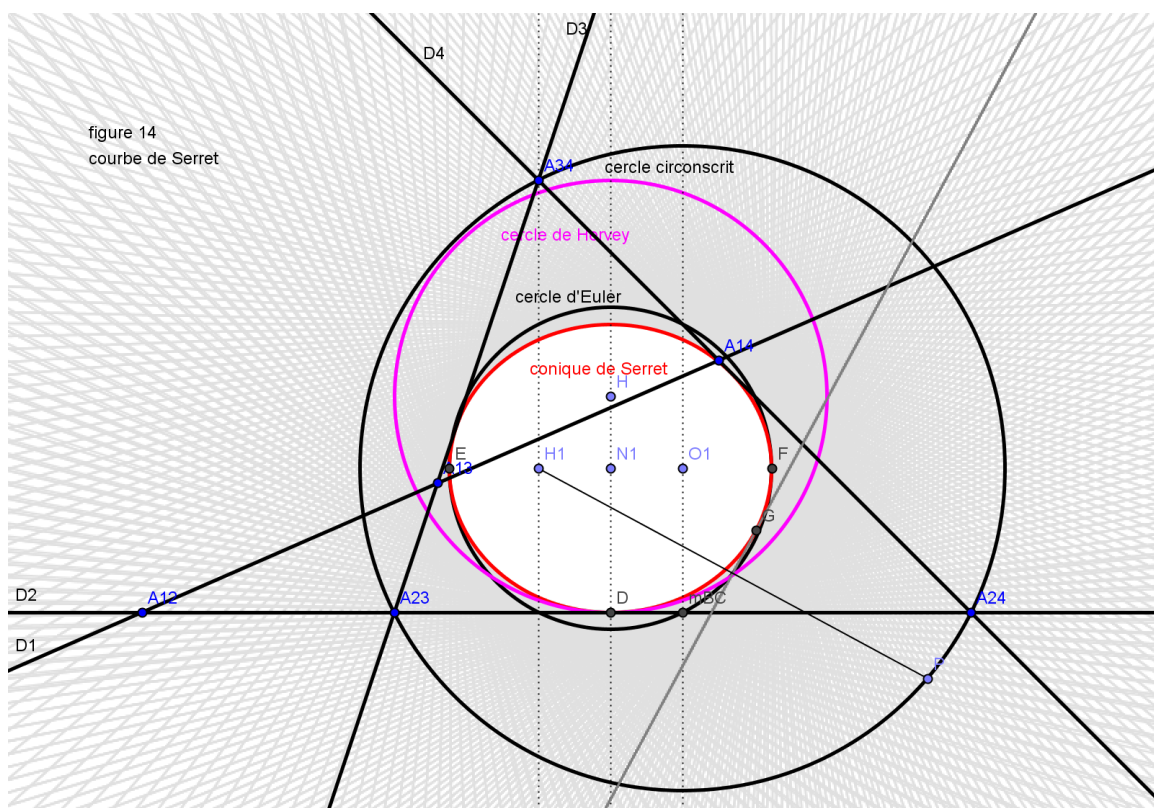
Cette équation figure dans l'article de Bickart de 1908 (12).

- En développant cette équation et en l'identifiant à une équation $ux + vy + w = 0$, il vient $x\cos\theta + y\sin\theta - x_H\cos\theta - y_H\sin\theta - r\cos 3\theta\cos\varphi - r\sin 3\theta\sin\varphi = 0$ et, en posant $u = k\cos\theta$, $v = k\sin\theta$ et $w = k(-x_H\cos\theta - y_H\sin\theta - r\cos 3\theta\cos\varphi - r\sin 3\theta\sin\varphi)$ et en faisant disparaître k , avec $k^2 = u^2 + v^2$, une équation de la forme classique $w(u^2 + v^2) + Au^3 + Bu^2v + Cuv^2 + Dv^3 = 0$ avec $A = x_H + r\cos\varphi$, $B = y_H + r\sin\varphi$, $C = x_H - 3r\cos\varphi$ et $D = y_H - r\sin\varphi$, permettant de calculer les coordonnées du centre de la H3, le rayon du cercle inscrit et l'angle φ .

Cette équation figure dans l'article de Liénard de 1911(13).

- En identifiant les tangentes à la H3 et les tangentes à la parabole, on va utiliser la forme $x + y \operatorname{tg} \theta_i - p/2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_i) = 0$ avec $u = 1$, $v = \operatorname{tg} \theta_i$ et $w = -p/2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_i)$, d'où l'on tire l'équation $-p/2 (1 + \operatorname{tg}^2 \theta_i)^2 + A + B \operatorname{tg} \theta_i + C \operatorname{tg}^2 \theta_i + D \operatorname{tg}^3 \theta_i = 0$ et un système de 4 équations à 4 inconnues, que l'on résout sans trop de difficulté. Il vient $A = p/2 (1 - \Pi \operatorname{tg} \theta_i)$, $B = p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_k$, $C = p/2 (2 - \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j)$ et $D = p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i$; on en tire $C - A = p/2 (1 - \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j + \Pi \operatorname{tg} \theta_i) = 4r \cos(\sum \theta_i)$ et $B - D = p/2 (\sum \operatorname{tg} \theta_i - \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_k) = 4r \sin(\sum \theta_i)$.
- On a $x_H = p/8 (5 - \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j - 3 \Pi \operatorname{tg} \theta_i)$ et $y_H = p/8 (3 \sum \operatorname{tg} \theta_i + \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_k)$ et le centre de la H3 est le point H, orthocentre du QI formé par les O_i et point de concours des médiatrices des segments d'Euler $O_i H_i$ ou point de Kantor-Hervey. Le rayon du cercle inscrit est $\frac{1}{4} * 4r = r$; il est égal à celui du cercle de Miquel. Les axes de la H3 font avec l'axe des abscisses un angle $\varphi / 3 = 1/3 \sum \theta_i$ et avec l'axe des ordonnées un angle $\pi/2 + \varphi / 3 = \pi/2 + 1/3 \sum \theta_i$.
- Pour un triangle T_i donné, le lieu du centre des cercles inscrits dans les deltoïdes tangentes aux 3 côtés est la médiatrice du segment d'Euler joignant l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, qui passe donc par le centre du cercle d'Euler.
- Dans un système cartésien d'axes ayant H comme origine et l'un des axes de la H3 comme axe des ordonnées, l'équation de la tangente est $x \cos \theta + y \sin \theta = r \cos 3\theta$. En développant $\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$, en écrivant $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$, en divisant par $\cos^3 \theta$ et en posant $\operatorname{tg} \theta = t$, il vient $(x + yt)(1 + t^2) = r(1 - 3t^2)$; il apparaît une équation du 3^{ème} degré en t : $t^3 y + t^2(x + 3r) + ty + x - r = 0$. Par un point de coordonnées x et y , il passe 3 tangentes à la H3; les racines $t_i = \operatorname{tg} \theta_i$ vérifient l'équation trouvée pour θ_j , θ_k et θ_l . On a $\sum t_j t_k = 1$ et, θ_j représentant l'angle $m^\circ \pi/3$ de D_j avec les axes de la H3, $\cos \sum \theta_j = \Pi \cos \theta_j (1 - \sum \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_k) = 0$, ce qui démontre simplement le théorème de Laguerre.
- La deltoïde de Steiner du triangle T_i s'obtient en faisant $\theta_i = 0$ dans les formules précédentes: $A = p/2$, $B = p/2 \Pi \operatorname{tg} \theta_j$, $C = p/2 (2 - \sum \operatorname{tg} \theta_j \operatorname{tg} \theta_k)$ et $D = p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_j$. Le centre est le point N_i , milieu de $O_i H_i$ et centre du cercle d'Euler, le rayon du cercle inscrit est r_i et l'angle avec l'axe des ordonnées est $\pi/2 + 1/3 \sum \theta_j$. La deltoïde de Steiner du triangle T_i est tangente à D_j , D_k et D_l ; elle est aussi tangente à δ puisque l'équation $x = p/2$ vérifie $u = 1$, $v = 0$ et $A = -w$. On vérifie une propriété connue: les tangentes au sommet des paraboles tangentes à 3 droites sont des droites de Simson du foyer et la deltoïde de Steiner d'un triangle est l'enveloppe des droites de Simson et, partant, celle des tangentes au sommet des paraboles inscrites dans le triangle.
- La tangente à la deltoïde parallèle à l'axe des abscisses s'obtient en faisant $u = 0$ et $v = 1$ et a pour équation $y + w = 0$ avec $w + D = 0$, çàd $y = D = p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i$. C'est donc la symétrique de l'axe des abscisses par rapport à la droite de Newton. Elle coupe le cercle inscrit en 2 points q_0 de coordonnées $[p/2 (1 - \Pi \operatorname{tg} \theta_i); p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i]$ et h_0 de coordonnées $[p/4 (3 - \sum \operatorname{tg} \theta_i \operatorname{tg} \theta_j - \Pi \operatorname{tg} \theta_i); p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i]$; h_0 est le symétrique de M par rapport à N.
- La tangente à la deltoïde parallèle à l'axe des ordonnées s'obtient en faisant $u = 1$ et $v = 0$ et a pour équation $x + w = 0$ avec $w + A = 0$, çàd $x = A = p/2 (1 - \Pi \operatorname{tg} \theta_i)$. C'est donc la symétrique de la parallèle à l'axe des ordonnées $m_0 M'$ par rapport à N (on rappelle que m_0 est le point où M_x recoupe le cercle (C) et M' est le symétrique de M par rapport à O). Elle coupe le cercle inscrit en 2 points h'_0 de coordonnées $[p/2 (1 - \Pi \operatorname{tg} \theta_j); p/2 \sum \operatorname{tg} \theta_i]$ et q_0 ; h'_0 est le symétrique de h_0 par rapport à H et de M' par rapport à N.

- Enfin, pour un triangle T_i donné, l'équation du cercle inscrit dans les H_3 tangentes aux 3 côtés est $(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 = r_i^2 (1 + \tan^2 \theta_i)$ et l'enveloppe de ce cercle s'obtient en dérivant cette équation par rapport à θ_i et en éliminant $\tan \theta_i$ entre les 2 expressions. On prend N_i comme origine, la droite d'Euler $O_i H_i$ comme axe des abscisses et la médiatrice du segment d'Euler comme axe des ordonnées et on pose $a = \frac{1}{2} O_i H_i$ et $b = r_i$; on a $x_h = 0$ et $y_h = a \tan \theta_i$. L'équation du cercle devient alors $x^2 + (y - a \tan \theta_i)^2 = b^2 (1 + \tan^2 \theta_i)$; en dérivant, on tire $\tan \theta_i = -ay / (b^2 - a^2)$ et, en reportant, il vient $x^2 / b^2 + y^2 / (b^2 - a^2) = 1$. C'est l'équation de la conique de Serret (4) de foyers O_i et H_i : ellipse pour un triangle acutangle et hyperbole dans le cas contraire. On sait que cette conique est aussi l'enveloppe des médiatrices des segments $H_i M$ lorsque M décrit le cercle C_i (cf figure 14).



- L'équation d'une épicycloïde à 1 rebroussement ou E1, appelée cardioïde, s'établit dans un repère ayant pour origine le centre O du cercle intérieur de rayon r en ajoutant les coordonnées du centre du cercle de même rayon roulant sur ce cercle fixe $(2r \cos t ; 2r \sin t)$ et celles d'un point fixe du cercle variable dans le repère ayant pour origine son centre $(r \cos 2t ; r \sin 2t)$; quand son centre a tourné d'un angle t , le second cercle a tourné d'un angle égal à $t (r + r) / r = 2t$.
- On note au passage que cette formulation simple fait apparaître la double génération de Crémona, car on obtient la même courbe en faisant tourner un cercle de rayon $2r$ autour du cercle intérieur en le contenant ; quand son centre a tourné d'un angle t , le second cercle a tourné d'un angle égal à $2t (2r - r) / 2r = t$.

- L'équation paramétrique classique de la cardioïde s'écrit $x = r(2\cos t + \cos 2t)$ et $y = r(2\sin t + \sin 2t)$ et son équation polaire s'écrit $\rho^2 = r^2(5 + 4\cos t)$; la courbe passe par les points S ($3r; 0$) pour $t = 0$, ($r/2; 3r\sqrt{3}/2$) pour $t = \pi/3$, R ($-r; 2r$) pour $t = \pi/2$, ($-3r/2; r\sqrt{3}/2$) pour $t = 2\pi/3$ et R ($-r, 0$) pour $t = \pi$. Elle admet O comme centre, R comme point de rebroussement, S comme sommet et OR comme axe de symétrie; elle est tangente en S intérieurement au cercle de centre O et de rayon $3r$, qui est son cercle directeur et extérieurement au cercle de diamètre RS et de rayon $2r$ et le cercle intérieur de centre O et de rayon r passe par R.
- Si l'on prend l'origine au point de rebroussement, il suffit d'ajouter r à l'abscisse et il vient $x = 2r(1 + \cos t)\cos t$ et $y = 2r(1 + \cos t)\sin t$; on peut passer immédiatement à l'équation polaire $\rho = 2r(1 + \cos t)$. Sous cette forme, il est immédiat que la courbe est à la fois l'inverse d'une parabole ayant même axe de symétrie et comme foyer le point de rebroussement et la conchoïde du cercle intérieur de centre O et de rayon r à partir du point de rebroussement.
- L'équation de la tangente à la cardioïde s'écrit $x' = -2r(\sin t + \sin 2t) = -4r\sin 3t/2 \cos t/2$ et $y' = 2r(\cos t + \cos 2t) = 4r\cos 3t/2 \cos t/2$ et $[x - r(2\cos t + \cos 2t)] \cos 3t/2 + [y - r(2\sin t + \sin 2t)] \sin 3t/2 = 0$. En simplifiant et en posant $t = 2\theta$, il vient $x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = 3r \cos \theta$.
Sous cette forme, on peut montrer plusieurs propriétés intéressantes :
 - La tangente fait un angle $\pi/2 + 3\theta$ avec l'axe de la cardioïde et, pour une direction donnée, il existe 3 droites parallèles à cette direction et tangentes à la cardioïde (puisque θ est déterminé mod $2\pi/3$). Ainsi, une cardioïde tangente aux 3 côtés d'un triangle est tangente aux 3 côtés de $3^3 = 27$ triangles différents et une cardioïde tangente aux 4 droites d'un QC est tangente aux 4 droites de $3^4 = 81$ QC différents.
 - La tangente coupe le cercle directeur de la E1 en 2 points e et v, de coordonnées ($3r\cos t; 3r\sin t$) et ($3r\cos 2t; 3r\sin 2t$) et le point de contact avec la E1 est V de coordonnées $[r(2\cos t + \cos 2t); r(2\sin t + \sin 2t)]$. Si l'on appelle O le centre de la E1 et S son point de tangence avec le cercle directeur, on vérifie que $(OS, Oe) = t$ et $(OS, Ov) = 2t$ (on retrouve la génération de Crémona), que v est le symétrique de S par rapport à Ol et que V est sur le segment ev, au tiers à partir de e.
 - Par ailleurs, les tangentes perpendiculaires à la première tangente ont pour équation $-x \sin 3\theta + y \sin 3\theta = 3r \cos(\theta + \pi/6 + 2k\pi/3)$ et le lieu des points d'où on peut mener 2 tangentes perpendiculaires est composé de 2 courbes selon la valeur de k : le cercle directeur d'équation cartésienne $x^2 + y^2 = 9r^2$ de centre O et de rayon $3r$ (pour $k = 2$) et le limaçon de Pascal d'équation cartésienne (avec origine en O) $\rho^2 = x^2 + y^2 = 9r^2[1 + \sqrt{3}/2 \cos(2\theta + \pi/6)]$ ayant son point double au point S situé sur l'axe de la cardioïde à une distance $3r/2$ de O (pour $k = 0$ ou 1).
 - Le limaçon de Pascal, courbe étudiée par Etienne Pascal, le père de Blaise, est une conchoïde de cercle d'équation polaire $\rho = a(1 + e\cos\theta)$ avec l'origine au nœud du limaçon. C'est la courbe décrite par un point ayant une position fixe par rapport à un cercle variable qui tourne autour d'un cercle fixe de même rayon. La cardioïde est un limaçon particulier obtenu pour $e = 1$, le point fixe du cercle variable étant alors sur sa circonférence; la boucle est réduite à un point et le nœud est le point de rebroussement. La tangente double à la cardioïde passe par S et recoupe le cercle directeur et le limaçon de Pascal en leurs 2 points communs d'abscisse $-3r/2$ et d'ordonnées respectives $3r\sqrt{3}/2$ et $-3r\sqrt{3}/2$ (on a alors $\theta = \pi/6$ et $\theta = -\pi/6$).

- Ainsi, par exemple, pour $3\theta = 0$, il y a 2 tangentes parallèles à l'axe des ordonnées aux points d'abscisse $3r$ (sommet de la cardioïde) et $-3r/2$ (nœud du limaçon où la tangente est double), pour $3\theta = \pi/4$, il y a 3 tangentes parallèles à la seconde bissectrice, qui coupent l'axe de la cardioïde aux points d'abscisses $3r (\sqrt{3} + 1) / 2$ (sommet du limaçon), $-3r$ (point du cercle directeur de la cardioïde) et $3r (\sqrt{3} - 1) / 2$ (sommet de la boucle du limaçon).
- Enfin, en développant $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$, en divisant par $\cos^3\theta$ et en posant $\tan\theta = t$ comme pour la deltoïde, il vient cette fois $x(1 - 3t^2) + yt(3 - t^2) = 3r(1 + t^2)$ et, en ordonnant, cela donne une équation du 3^{ème} degré en t : $t^3y + 3t^2(x + r) - 3yt + x - 3r = 0$. On a 3 racines t_j , t_k et t_l avec $\sum t_j = -3(x + r)/y$, $\sum t_j t_k = -3$ et $\prod t_j = (x - 3r)/y$. On forme alors $\tan(\sum t_j) = (\sum t_j - \prod t_j) / (1 - \sum t_j t_k) = -x/y$. La direction d'une tangente étant $\pi/2 + 3\theta_j$ et $y/x = \tan\theta$ représentant la direction de la droite joignant le centre O de la cardioïde à un point K de coordonnées x et y , on a $1/3(3\pi/2 + \sum 3\theta_j) = \pi/2 + \sum \theta_j = \pi/2 + \theta$ et la droite KO est la direction moyenne des 3 tangentes θ_j ; elle est définie m° $\pi/3$ et il y a donc 3 droites.
- Dans le cas de la tangente double, on retrouve la propriété connue qu'une autre tangente la coupe en un point K tel que KO trisecte l'angle entre la tangente double et cette tangente. KO est donc perpendiculaire au segment joignant le point de rebroussement au point de contact entre le cercle fixe et le cercle variable.
- Enfin, dans le cas de 3 tangentes parallèles, leur point de concours est rejeté à l'infini et la somme des distances algébriques du centre aux 3 tangentes est nulle ; on trouve $3r [\cos\theta + \cos(\theta + 2\pi/3) + \cos(\theta - 2\pi/3)] = 0$. Les 3 points K1, K2 et K3 d'intersection de ces tangentes avec la tangente double sont tels que les angles $\angle K1OK2$ et $\angle K2OK3$ sont égaux à $\pi/3$. Enfin le barycentre des points de contact de ces 3 tangentes parallèles avec la cardioïde est son centre O.
- Si l'on considère la cardioïde de centre O et de point de rebroussement M dans le repère d'origine O et d'axe des abscisses OM, l'équation de la tangente Δ_i s'écrit $x \cos 3\theta + y \sin 3\theta = 3r \cos\theta$ et celle de la bitangente est $x = -3r/2$; leur point d'intersection K_i a pour coordonnées $(-3r/2 ; 3r/2 \tan\theta_i)$ et K_iO est la médiatrice de MO_i . Le point primaire e_i a pour coordonnées $(3r \cos 2\theta_i ; 3r \sin 2\theta_i)$; celles de O_i étant $(r \cos 2\theta_i ; r \sin 2\theta_i)$, O_i est sur le segment Oe_i au tiers à partir de O. La distance de O_i à Δ_i est $2r \cos 2\theta_i$; elle est égale à OM, ce qui prouve que Δ_i est tangente au cercle C_i de centre O_i et passant par M.
- L'équation polaire de la parabole dans son repère d'origine M et d'axe des abscisses son axe symétrie est $\rho = p / (1 + \cos\theta)$ et celle de la cardioïde dans le repère d'origine M et d'axe des abscisses son axe de symétrie $\rho = 2r (1 + \cos\theta)$. On retrouve bien sous cette forme que la parabole tangente aux 4 droites D_i et la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i s'échangent dans la transformation Clawson-Schmidt. En particulier, comme les droites D_i et les cercles C_i s'échangent dans la même transformation, les 4 points de contact V_i de la cardioïde avec les 4 cercles C_i sont les transformés des 4 points de contact P_i de la parabole avec les 4 droites D_i (on a vu dans la partie G $MV_i = 4r \cos^2\theta_i$ et dans la partie E $MP_i = p / 2\cos^2\theta_i$).

K) Coordonnées barycentriques et faisceaux de coniques

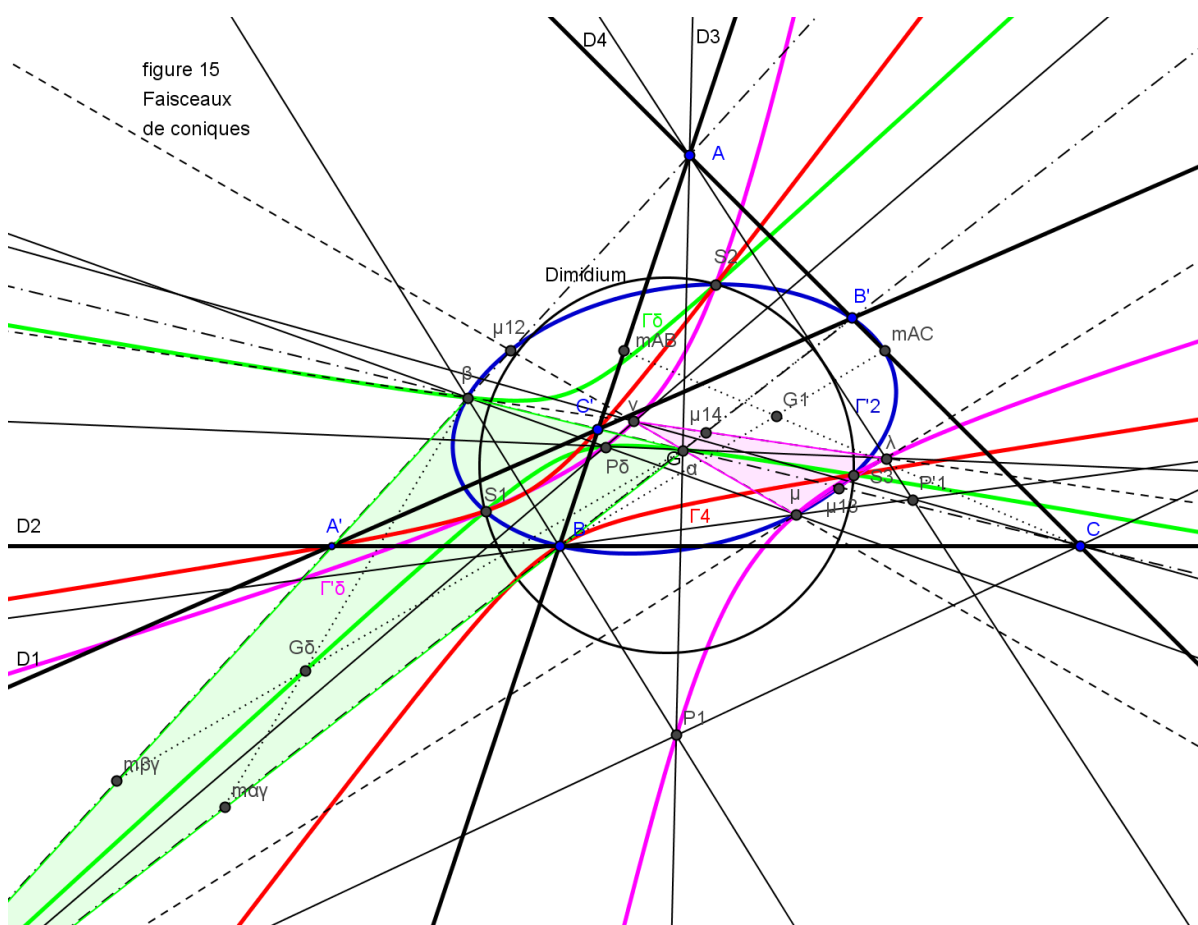
figure 15

(cf L. Ripert (11), E. Schmidt (31), J.D. Eiden (37) et C. A. van Tienhoven)

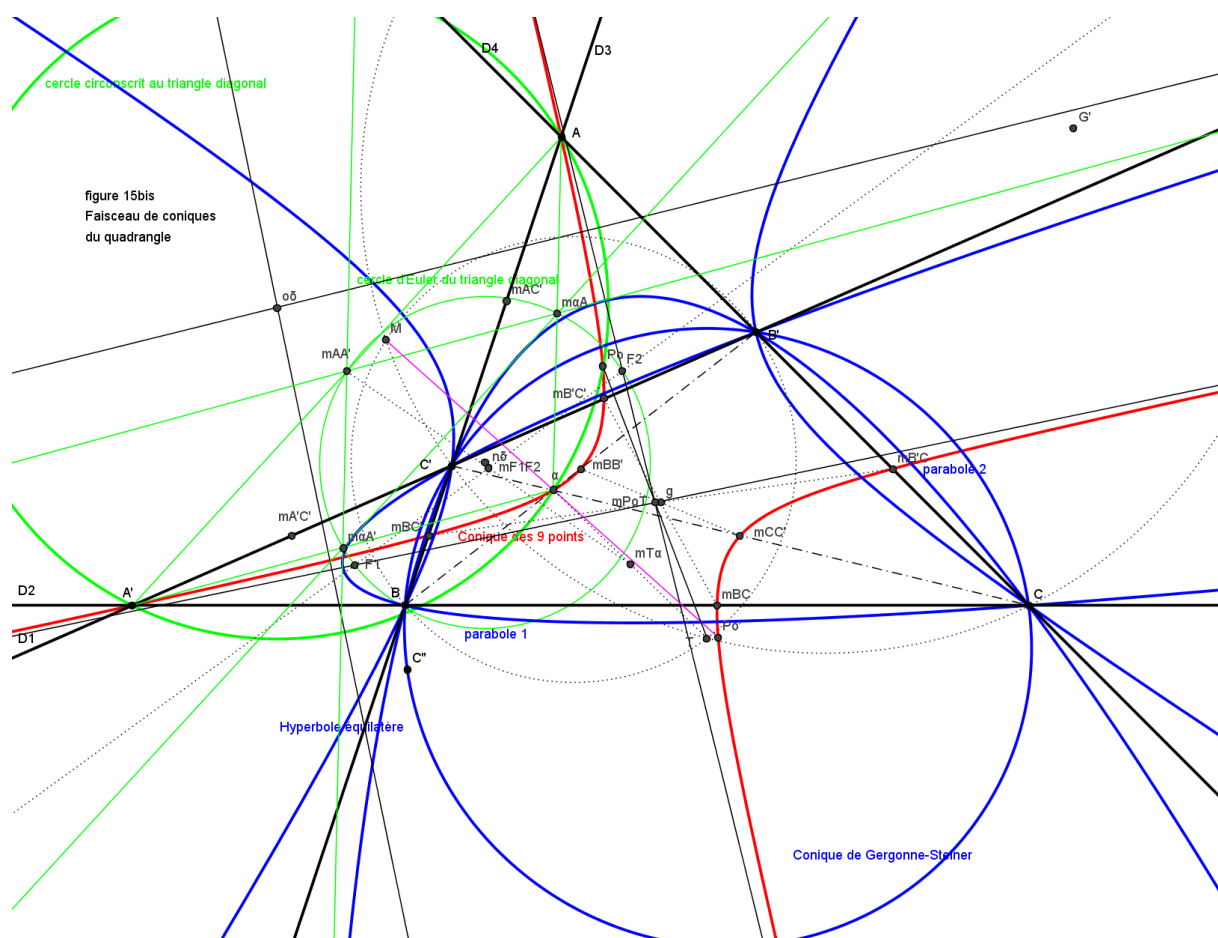
- On a repris ici les notations de L.Ripert, qui sont aussi celles de l'ouvrage récent de J.D. Eiden sur la géométrie analytique classique et surtout celles de Chris van Tienhoven dans son site merveilleux Encyclopedia of Quadrifigures, équivalent pour le QC du site Encyclopedia of Triangle Centers de Clark Kimberling pour le triangle ; elles diffèrent de celles de J.P. Ehrmann.
- On appelle X , Y et Z les coordonnées barycentriques d'un point ; l'équation d'une droite est $uX + vY + wZ = 0$ et celle du cercle circonscrit aux 3 sommets pris comme référence $a^2YZ + b^2ZX + c^2XY = 0$ (a , b et c étant les longueurs des côtés du triangle ABC).
- On appelle T_1 l'un des triangles T_i , D_1 sa droite D_i correspondante, A , B et C ses 3 sommets, A' , B' et C' les points d'intersection de D_1 avec ses côtés et α , β et γ les sommets du triangle diagonal, intersections des diagonales 2 à 2. G_1 est le centre de gravité du triangle ABC , P_1 le dual de la droite D_1 et Γ_1 est la conique qui passe par les 5 points A , B , C , G_1 et P_1 . Cette construction est possible pour chaque T_i et il existe donc 4 points P_1 , P_2 , P_3 et P_4 et 4 coniques Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 .
Les coordonnées de A , B et C sont $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. Si l'équation de D_1 est $uX + vY + wZ = 0$, les coordonnées de A' , B' et C' sont classiquement $(0, -w, v)$, $(w, 0, -u)$ et $(-v, 0, u)$ et celles de α , β et γ sont $(-vw, wu, uv)$, $(vw, -wu, uv)$ et $(vw, wu, -uv)$. Les coordonnées de P_1 sont $(1/u, 1/v, 1/w)$ et l'équation de Γ_1 $(v-w)YZ + (w-u)ZX + (u-v)XY = 0$.
- Les coordonnées de M sont $(a^2 / 1/w - 1/v, b^2 / 1/u - 1/w, c^2 / 1/v - 1/u)$ et M appartient bien au cercle circonscrit d'équation $a^2 YZ + b^2 ZX + c^2 XY = 0$.
L'équation de Δh s'écrit $(b^2 + c^2 - a^2)(1/w - 1/v)X + \dots = 0$, cette droite passe par l'orthocentre du triangle ABC , de coordonnées $(\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$, celle de Δn s'écrit $(1/v + 1/w - 1/u)X + (1/w + 1/u - 1/v)Y + (1/u + 1/v - 1/w)Z = 0$ et cette droite comprend les 3 milieux des segments AA' $(v-w, -w, v) \dots$
- On trouve systématiquement dans EQF les coordonnées barycentriques par rapport à un des 4 triangles T_i pris comme référence ABC et par rapport au premier triangle diagonal $\alpha\beta\gamma$; les expressions prennent alors un tour plus symétrique.
Ainsi, dans le repère avec α , β et γ $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$, on trouve A , B et C comme $(0, w, v)$, $(w, 0, u)$ et $(v, u, 0)$, celles de A' , B' et C' sont inchangées. L'équation de la droite D_1 est la même et celle des 3 autres droites s'obtient en changeant u en $-u$, v en $-v$ ou w en $-w$. Les coordonnées de P_1 sont inchangées et celles de P_2 , P_3 et P_4 s'obtiennent là aussi en changeant le signe d'un des coefficients u , v ou w .
- Les coordonnées de M deviennent $[b^2/(u^2 - w^2) - c^2/(u^2 - v^2), \dots]$. L'équation de Δn devient $u^2X + v^2Y + c^2Z = 0$ et son dual P_δ a pour coordonnées $1/u^2$, $1/v^2$ et $1/w^2$; l'équation de Δh devient $[b^2(u^2 - v^2) - c^2(u^2 - w^2)]X + \dots = 0$. La conique Γ_δ passant par α , β , γ , leur centre de gravité G_δ et le point P_δ (le dual de Δn , qui est aussi le centre de perspective entre les 2 triangles diagonaux) a pour équation $(v^2 - w^2)YZ + (w^2 - u^2)ZX + (u^2 - v^2)XY = 0$.

- On considère le faisceau (F) des coniques tangentes aux 4 droites Di .
 - Les centres de ces coniques sont sur la droite de Newton Δn .
 - Les foyers de ces coniques sont sur la courbe de van Rees (cf infra).
 - Le faisceau (F) contient la parabole tangente aux 4 Di (un premier foyer est M et, son axe étant parallèle à la droite de Newton, le centre et le second foyer sont rejetés à l'infini de cette droite).
 - Il contient 0, 1 ou 2 hyperboles équilatères selon la position de la droite de Newton par rapport au cercle circonscrit au triangle diagonal ; les centres étant les intersections de la droite et du cercle, il y en a 0 pour une droite extérieure, 1 pour une tangente et 2 pour une sécante.
- Les cercles orthoptiques ou de Monge de ces coniques (lieu des points d'où partent 2 tangentes perpendiculaires à ces coniques) constituent un second faisceau (F') ; ils admettent la directrice de la parabole Δh comme axe radical et ont leurs centres sur la droite de Newton Δn .
Le faisceau (F') contient les cercles de diamètre $AijAkl$.
- Les cercles admettant la droite de Newton Δn comme axe radical et la directrice de la parabole Δh comme lieu des centres constituent un 3^{ème} faisceau (F'').
(F'') contient les cercles polaires des 4 triangles Ti (réels ou imaginaires), dont les centres sont les orthocentres Hi , et le cercle circonscrit au triangle diagonal.
- Les faisceaux (F') et (F'') constituent deux faisceaux conjugués de cercles orthogonaux, l'axe radical de l'un étant la ligne des centres de l'autre et inversement. Deux points réels de la droite de Newton Δn ou de la directrice de la parabole Δh sont les points de base de l'un des faisceaux et les points de Poncelet de l'autre ; si ces deux points sont confondus au point d'intersection des deux droites, chacun des deux faisceaux est constitué de cercles tangents en ce point entre eux et à l'une des deux droites.
- Chaque diagonale est coupée harmoniquement par les 2 autres (β et γ divisent AA' harmoniquement). Le triangle diagonal est en perspective avec chacun des triangles Ti , le centre de perspective étant le point P_1 ($A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$ se coupent en P_1) ; les 4 points de type P_1 sont par construction alignés 2 à 2 avec les segments $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$, $A\alpha$, $B'\beta$ et $C'\gamma$... et toutes les divisions sont harmoniques.
Le triangle diagonal est autopolaire par rapport à toutes les coniques de (F), çàd que chaque côté est la polaire du sommet opposé ; le cercle circonscrit au triangle diagonal appartient au faisceau (F''), son centre étant sur Δh , et est orthogonal aux cercles de diamètre $AijAkl$, qui font partie du faisceau (F').
- Les centres des cercles inscrits et exinscrits dans le triangle diagonal constituent les points de base d'un faisceau ponctuel d'hyperboles équilatères ; le triangle diagonal est autopolaire par rapport à toutes ces hyperboles équilatères.
Leurs centres sont sur le cercle circonscrit au triangle diagonal, qui est le cercle d'Euler commun aux 4 triangles formés par les 4 points de base pris 3 à 3, chaque point étant l'orthocentre du triangle formé par les 3 autres.
- Enfin, les coniques non dégénérées passant par 4 des 6 points du quadrilatère complet, çàd en fait par les sommets de 2 des 3 diagonales, constituent 3 faisceaux ponctuels (F1), (F2) et (F3). Le triangle formé par le point d'intersection de ces 2 diagonales et par les sommets de la 3^{ème} est autopolaire par rapport à toutes les coniques du faisceau ($AA'\alpha$ est autopolaire par rapport à toutes les coniques passant par B, B', C et C').

- Les lieux des centres de ces coniques sont 3 coniques de 9 points Γ'_1 , Γ'_2 et Γ'_3 ; chacune passe par 4 milieux de côtés du quadrilatère complet, les milieux des 2 diagonales, leur point de concours (sommet du triangle diagonal) et les 2 sommets de la 3^{ème} diagonale. Les centres de ces 3 coniques sont les milieux des segments joignant les milieux des côtés opposés et ceux des diagonales. Ces 3 coniques de type Γ' et les 4 coniques de type Γ passent par 3 points communs, S1, S2 et S3.
- Les 3 coniques Γ'_1 , Γ'_2 et Γ'_3 ont 4 points communs 2 à 2 (3 combinaisons), les 3 communs aux 3, le 4^{ème} étant le milieu de la diagonale commune et les 4 coniques Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 et Γ_4 ont aussi 4 points communs 2 à 2 (6 combinaisons), les 3 communs aux 4, le 4^{ème} étant un sommet du QC. Deux coniques Γ et Γ' ont 4 points communs, les 3 communs aux 7, le 4^{ème} étant là encore un sommet du QC.
- Les 3 points communs à ces 7 coniques appartiennent en outre à 2 autres coniques, $\Gamma\delta$, qui passe par les sommets α , β et γ du triangle diagonal, son centre de gravité $G\delta$ et le centre de perspective entre les 2 triangles diagonaux $P\delta$ et $\Gamma'\delta$, qui passe par les sommets λ , μ et ν du second triangle diagonal et par les 5 centres de perspective P1, P2, P3, P4 et $P\delta$. Ces 3 points sont enfin sur le cercle Dimidium de centre G passant par M (cercle QL-Ci6 de EQF cf partie C). La parabole tangente aux 4 droites Di est tangente aux côtés du triangle S1S2S3 (source EQF) et Eckart Schmidt a montré que le segment d'Euler de ce triangle est celui du QC, G étant le centre du cercle circonscrit, B le centre de gravité et H' l'orthocentre.
- Sur la figure 15, on a représenté la conique Γ_4 du triangle A'BC', la conique Γ'_2 de la diagonale BB' et les coniques $\Gamma\delta$ et $\Gamma'\delta$ circonscrites aux 2 triangles diagonaux. Outre les 3 points communs S1, S2 et S3, Γ_4 et Γ'_2 se coupent en B et $\Gamma\delta$ et $\Gamma'\delta$ en $P\delta$, enfin $\Gamma\delta$ coupe Γ'_2 en β .

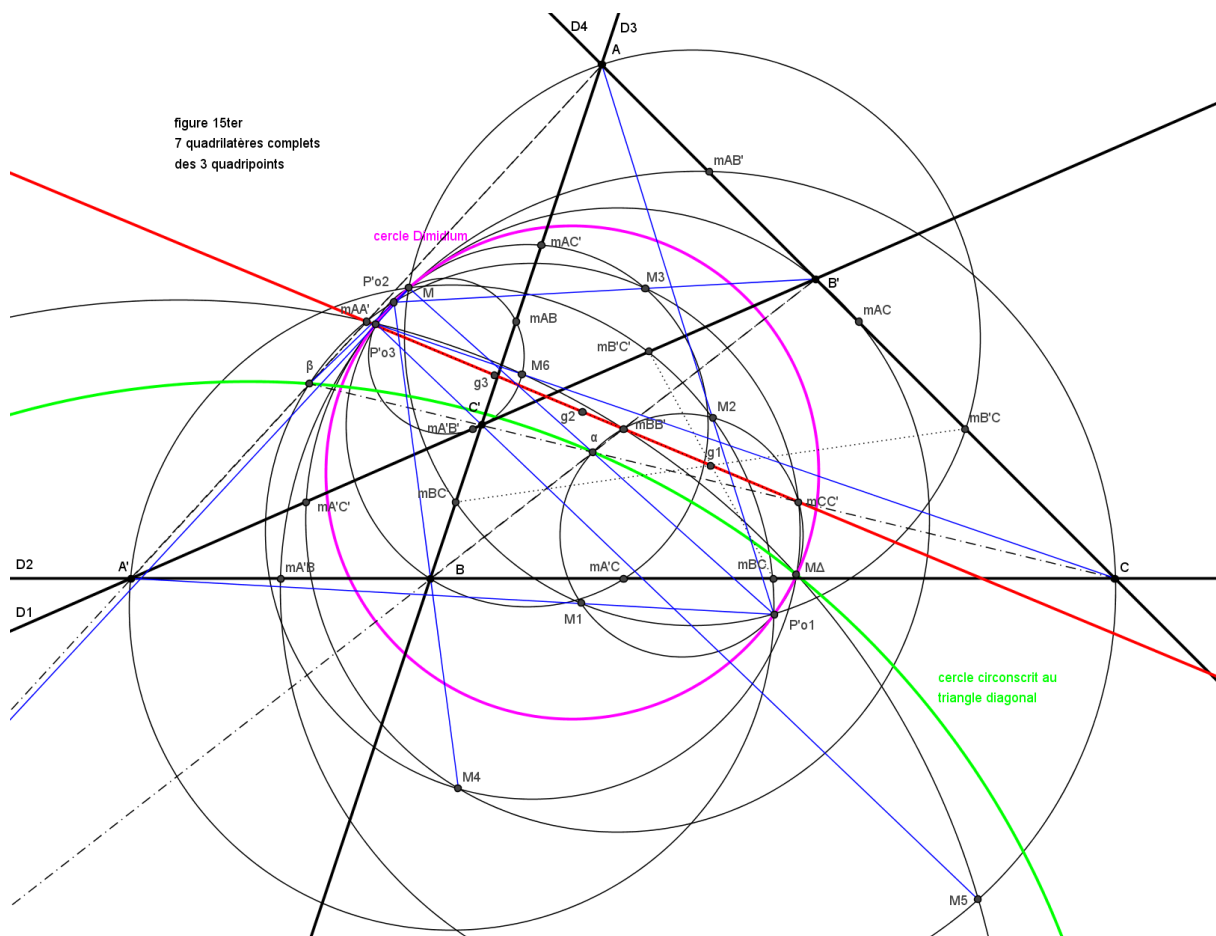


- L'étude sur le QC serait incomplète sans une incursion vers le QA. On vient de voir que le lieu des centres des coniques passant par les 4 points B, C, B' et C' est la conique des 9 points la conique Γ_1 ; elle passe par les 6 milieux des 4 côtés et des 2 diagonales et par les sommets du triangle diagonal du QA, intersections des côtés opposés et des diagonales. Le centre g de la conique est le milieu commun des 3 segments joignant les milieux des 2 couples de côtés opposés et ceux des diagonales ; c'est le point QA-P1 de EQF et Γ_1 est QA-Co1 dans EQF.
- Cette conique passe par 24 points intéressants :
 - les 6 milieux des côtés opposés et des diagonales
 - les 3 sommets du triangle diagonal A, A' et α et leurs symétriques par rapport au centre g (α est un sommet du triangle diagonal du QC)
 - le point λ , un des sommets du second triangle diagonal du QC et son symétrique par rapport au centre g
 - le point Po ou point d'Euler-Poncelet du QA ; c'est le point d'intersection des 4 cercles d'Euler des 4 triangles formés par 3 points du QA. Po est le point QA-P2 de EQF ; il est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal, cercle QA-Ci1 de EQF
 - le point Po' ou point de Gergonne-Steiner du QA ; c'est l'intersection des 4 cercles passant par les milieux des 3 segments joignant 1 sommet du QA aux 3 autres et le symétrique de Po par rapport au centre g. Po' est le point QA-P3 de EQF. Po' est aligné avec α et le point de Miquel M du QC.
 - les points S1, S2 et S3 vus précédemment et leurs symétriques par rapport au centre g ; S1, S2, S3, M et Po' sont sur le cercle Dimidium du QC.
 - enfin 2 points à l'infini



- Chacun de ces points est le centre d'une conique passant par les 4 points :
 - pour chaque milieu, 2 des 4 points sont symétriques par rapport à ce milieu et la conique passe par les 2 autres points et leurs symétriques
 - pour chacun des 3 sommets ou leurs symétriques par rapport au centre, la conique dégénère en 2 droites
 - P_o est le centre de l'unique hyperbole équilatère passant par les 4 points ; c'est la conique QA-Co2 de EQF
 - P_o' est le centre de la conique d'excentricité minimale de Gergonne-Steiner ; c'est la conique QA-Co3 de EQF
 - Les 2 points à l'infini correspondent aux 2 paraboles circonscrites
- La construction de ces 2 paraboles nécessite l'introduction d'un nouveau point du QA, le point isogonal ou tangentiel T, second point d'intersection des cercles passant par M, B et B' et M, C et C' ; c'est le point QA-P4 de EQF.
- On utilisera les propriétés suivantes des 2 paraboles, trouvées dans EQF :
 - les 2 paraboles sont tangentes aux 3 côtés du triangle médian du triangle diagonal ; leurs foyers sont donc sur le cercle d'Euler de ce triangle, de centre $n\delta$. C'est le cercle QA-Ci2 de EQF et $n\delta$ est le point QA-P13
 - le milieu du segment joignant les foyers est le barycentre des sommets du triangle diagonal A, A' et α et du point isogonal T (milieu du segment joignant les milieux de AA' et de αT) ; c'est le point QA-P28 de EQF
 - les 2 axes des paraboles se coupent au milieu du segment joignant le point d'Euler-Poncelet P_o au point isogonal T ; c'est le point QA-P6 de EQF
 - les 2 directrices des paraboles sont les droites de Steiner des foyers et passent par l'orthocentre du triangle médian du triangle diagonal, çàd le centre du cercle circonscrit à ce triangle $o\delta$; c'est le point QA-P11 de EQF
 - la construction est alors aisée : connaissant le point d'Euler-Poncelet P_o et le point isogonal ou tangentiel T, on détermine le milieu du segment F1F2, puis ces 2 points sur le cercle d'Euler du triangle diagonal, ensuite le milieu du segment P_oT , les 2 axes des paraboles et enfin les 2 directrices.
- Lorsque les 4 points sont cocycliques, le QA devient un QI et les points étudiés se simplifient ; le point de Gergonne-Steiner P_o' et le point isogonal ou tangentiel T sont confondus avec le centre du cercle circonscrit aux 4 points et le point d'Euler-Poncelet est le symétrique de ce centre par rapport au centre de gravité des 4 points (ainsi, par exemple, le point N, centre de Clawson du QC et symétrique du point G par rapport au centre O du cercle de Miquel est le point d'Euler-Poncelet du QI formé par les 4 centres O_i des cercles circonscrits aux 4 triangles T_i)
- Pour un QI, son triangle diagonal est identique à celui du QC tangentiel formé par les 4 tangentes au cercle circonscrit aux sommets du QI. Cette propriété, qui se démontre en utilisant le théorème de Pascal, est même vraie pour toute conique. Ainsi, nous avons vu que le triangle diagonal du QA formé par les 4 points de contact de la parabole avec les droites D_i était celui du QC, car les tangentes en ces points à la parabole sont par définition les droites D_i , et que c'était aussi celui du QC formé par les tangentes en ces points à la parabole associée (cf partie E)

- On a vu, au début de la partie A, que chaque QC détermine 4 QA ayant pour diagonales 2 des 3 diagonales du QC ; à l'inverse chaque QA conduit à 3 QC, l'un des 3 étant toujours le QC d'origine. Il y a donc au total 7 QC différents avec 7 points de Miquel, notés M et M1 à M6, et 3 points de Gergonne-Steiner Po'1, Po'2 et Po'3. Ces 7 QC sont formés par 4 droites, D1, D2, D3 et D4 pour le QC d'origine, et 2 des 4 droites avec 2 des 3 diagonales pour les 6 autres.
- On peut déterminer tous ces points en traçant 3 cercles passant par les milieux de 2 côtés opposés ou des 2 diagonales de chaque QA et leur intersection, soit 9 cercles au total ; ainsi, pour le QA BC'B'B, le cercle circonscrit à mBB', mCC' et α passe par Po'1, M1 et M2, le cercle circonscrit à mBC', mB'C et A passe par Po'1, M et M2 et le cercle circonscrit à mBC, mB'C' et A' passe par Po'1, M et M1.
- On a les alignements Po'1 α M, Po'1AM1 et Po'1A'M2, Po'2 β M, Po'2BM3 et Po'2B'M4 et Po'3 γ M, Po'1CM5 et Po'3C'M6, ce qui donne au total une jolie toile d'araignée.
- Enfin, les 3 points Po'1, Po'2 et Po'3 sont sur le cercle intermédiaire ou Dimidium de centre G, qui passe par le point de Miquel M et par les points S1, S2 et S3 rencontrés précédemment (chaque point Po' est le 4^{ème} point d'intersection de la conique Γ' d'un des 3 QA du QC, les 3 autres étant les points communs S1, S2 et S3). Ce cercle passe aussi par le point de Miquel du QC diagonal M Δ ; on voit bien sur la figure 15ter que ce point est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal et sur les 3 cercles circonscrits à α , mBB' et mCC', β , mCC' et mAA' et γ , mAA' et mBB'. On a déjà vu que ce point est le point QL-P17 de EQF.



L) Courbe cubique circulaire focale de van Rees

figure 16

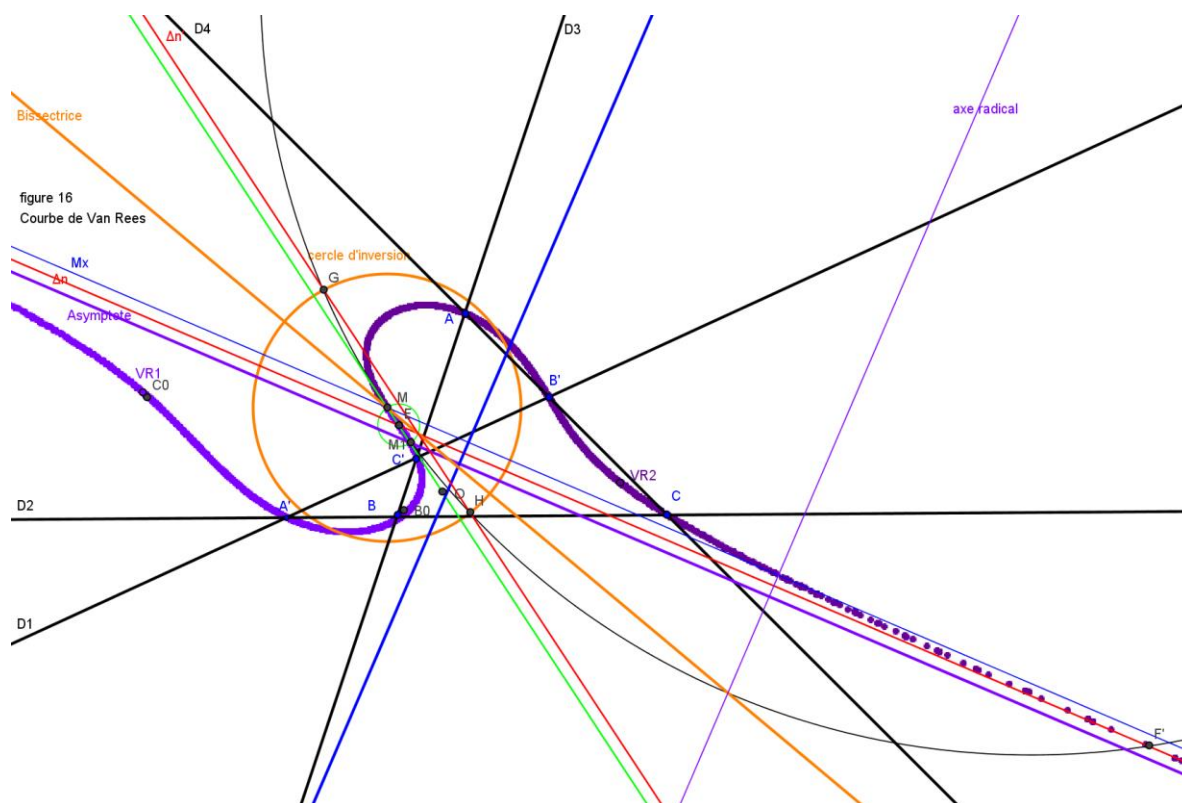
(cf Van Rees (2), D. Roux et M. Tixier (29) et J.P. Ehrmann and B. Gibert (30))

- La courbe cubique circulaire focale de van Rees (VR) est une courbe qui passe par les 6 points A_{ij} et par le foyer M de la parabole, ainsi que par les 2 points circulaires à l'infini et par les pieds des hauteurs du triangle diagonal (projections A_0, B_0 et C_0 de α, β et γ sur AA', BB' et CC') ; on notera que les 4 cubiques dégénérées composées d'un cercle C_i et d'une droite D_i passent aussi par les 6 points A_{ij} , par les 2 points circulaires à l'infini et par le point de Miquel M .
- Cette courbe VR admet une asymptote réelle symétrique de l'axe de la parabole par rapport à la droite de Newton (tangente à la $H3$) et 2 asymptotes imaginaires passant par M et par les 2 points circulaires à l'infini ; elle admet 3 points d'inflexion alignés I_1, I_2 et I_3 . C'est la cubique QL-Cu1 de EQF.
- Tout point X de la courbe VR est tel que
 - les projections orthogonales de X sur les 4 D_i (et les symétriques de X par rapport aux 4 D_i) sont cocycliques ou alignées.
 - les 3 angles AXA', BXB' et CXC' ont la même bissectrice.
 - les segments AC et $A'C'$ (ou AB et $A'B'$, BC et $B'C'$, AB' et $A'B$, AC' et $A'C$, BC' et $B'C$) sont vus de X sous un même angle.
- Tout point X de la courbe VR admet un conjugué X' sur la courbe tel que
 - X et X' sont conjugués isogonaux par rapport à chaque triangle T_i .
 - le milieu de XX' est sur la droite de Newton.
 - la bissectrice de XX' est celle des angles $A_{ij}MA_{kl}$ (çàd AMA', BMB' et CMC') ; on a déjà vu qu'elle était aussi celle de l'angle (Mx ; MO).
 - $MX \cdot MX' = MA_{ij} \cdot MA_{kl} = 2 \text{ pr}$ (cf supra).
 - les cercles passant par M et X recoupent la courbe VR en Y et Z tels que la droite variable YZ passe par le point fixe X' .
 - les droites passant par X recoupent la courbe VR en Y' et Z' tels que le cercle variable circonscrit à M, Y' et Z' passe par le point fixe X' .
- Pour tout point X de la courbe VR, la bissectrice des angles $\angle YXY'$ est la même pour tous les couples de points conjugués Y et Y' .

La courbe de Van Rees est donc à la fois autoisogonale par rapport à chacun des 4 triangles T_i et globalement invariante dans la transformation qui associe l'inversion de centre M et de rapport MX . $MX' = 2 \text{ pr}$ et la symétrie par rapport à la bissectrice commune des angles $\angle XMX'$ (transformation Clawson-Schmidt déjà vue).

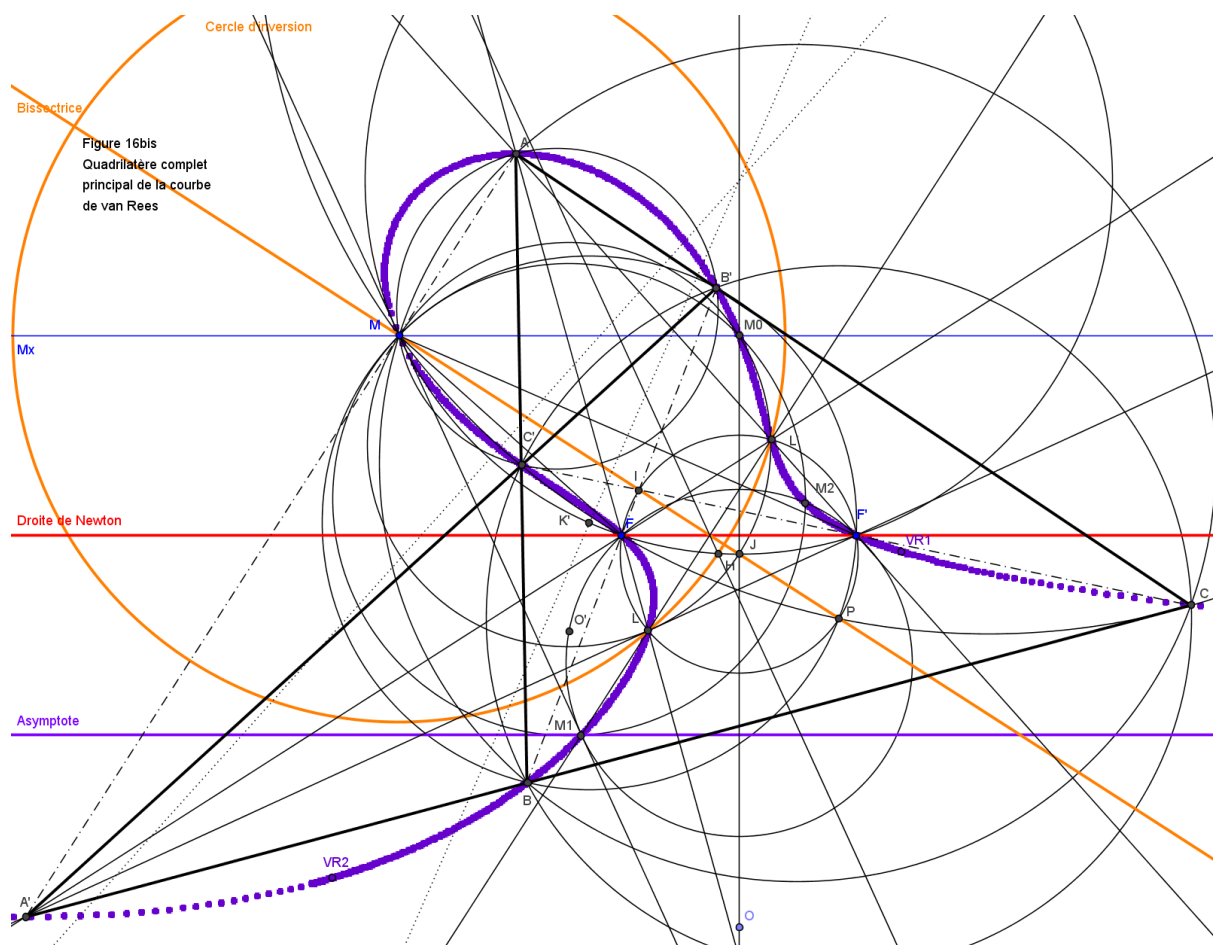
- Pour tout point X de la courbe VR, on appelle tangentiel de X le point X_1 où la tangente en X recoupe la courbe. Deux points conjugués X et X' ont le même tangentiel X_1 et XX' recoupe la courbe au point X_0 conjugué de X_1 . Ainsi, la courbe VR coupe la droite de Newton en 2 points conjugués F et F' , dont le tangentiel est M ; le conjugué M' (second foyer de la parabole) de M est le point à l'infini de la droite de Newton et le tangentiel commun à M et M' est le point M_1 où la courbe VR recoupe son asymptote (M_1 est sur MO) ; le conjugué M_0 de M_1 est sur la parallèle à la droite de Newton menée par M (çàd l'axe de la parabole).
- F et F' sont les 2 points caractéristiques (de base pour l'un ou de Poncelet pour l'autre) de 2 faisceaux orthogonaux. Le premier est celui des cercles dont un diamètre joignant 2 points de la courbe passe par M ; le centre de ces cercles se situe sur la droite de Newton. Le second est celui des cercles passant par 2 points de contact des tangentes issues de M situés sur la courbe et tels que la corde joignant ces 2 points passe par le tangentiel M_1 de M ; le centre de ces cercles est sur un axe orthogonal à la droite de Newton (médiatrice de FF').

- Si le premier faisceau est à points de base (et le second à points de Poncelet), la courbe a 2 composantes connexes et le cercle de diamètre MM_1 passe par F et F' ; dans le cas inverse, elle en a une seule.
- Pour construire la courbe, on a les 6 points A_{ij} du QC, les pieds des hauteurs du triangle diagonal (càd A_0 , B_0 et C_0) et le point M . On connaît le cercle d'inversion et la bissectrice des angles $\angle AMA'$, $\angle BMB'$ et $\angle CMC'$; on dispose aussi de de l'axe de la parabole Mx et de la droite de Newton Δ_n , la droite MO est la symétrique de Mx par rapport à la bissectrice, l'asymptote de la courbe est la symétrique de Mx par rapport à Δ_n . On détermine le point M_1 à l'intersection de ces 2 droites, puis les points F et F' , le cercle qui passe par M , F et F' (appartenant au second faisceau) étant le conjugué Clawson-Schmidt de la droite de Newton. Chris van Tienhoven a trouvé que le milieu de FF' est sur la droite $H\delta H'$ joignant le point de Morley à l'orthocentre du triangle diagonal (droite $QL-L6$ de EQF). On considère alors les cercles dont le centre est sur la médiatrice de FF' et les points de contact des tangentes issues de M à ces cercles décrivent la courbe VR .
- Un QC détermine une courbe VR , mais, pour une courbe VR , il existe une infinité de QC ayant le même point de Miquel M , le même axe Mx des paraboles tangentes aux 4 droites et la même droite de Newton Δ_n ; il suffit de choisir un cercle passant par M , qui recoupe VR en 3 points X , Y et Z , dont les conjugués X' , Y' et Z' sont alignés (à l'inverse, le choix de 3 points alignés de VR détermine le QC, car le cercle circonscrit aux 3 conjugués passe par M). Les centres des cercles de Miquel de ces QC sont sur la même droite MM_1 , car la bissectrice de l'angle OMx est la même. Par exemple, le cercle circonscrit à A_0 , B_0 et C_0 (cercle d'Euler du triangle diagonal) passe par M ; du coup, les points A_1 , B_1 et C_1 (tangentiels de A , B et C et conjugués de A_0 , B_0 et C_0) sont alignés. De plus, A , B , C , A_0 , B_0 et C_0 d'une part, A , B , C , M , F et F' d'autre part appartiennent à une même conique et on peut trouver d'autres coniques de même nature contenant toujours les triplet A_0 , B_0 et C_0 ou M , F et F' et un second triplet A , B' et C' , A' , B et C' ou A' , B' et C ...



- On note que la courbe de van Rees est entièrement déterminée avec les 3 points M, F et F', puisqu'on a le point de Miquel, la droite de Newton et l'asymptote de la courbe, la bissectrice de l'angle FMF' et le cercle d'inversion de centre M et de rayon $\sqrt{MF \cdot MF'}$, les 2 éléments de la transformation Clawson-Schmidt. On peut alors déterminer les points M0 et M1 (cf supra) et leur tangentiel M2 à l'intersection des cercles circonscrits à M, M0 et M1 et M1, F et F'.
- On peut ensuite construire un nouveau QC de la manière suivante :
 - On détermine les 2 points L et L' d'intersection du cercle d'inversion avec la perpendiculaire menée par M1 à la bissectrice intérieure de l'angle FMF' ; L et L' sont conjugués et ont pour tangentiel le point M0.
 - On détermine les 2 points A et A' intersections de FL et F'L' et de FL' et F'L ; A et A' sont conjugués et ont pour tangentiel le point à l'infini de la droite de Newton (les tangentes en A et A' à la courbe sont parallèles à cette droite).
 - On détermine les 2 couples de points B et B' et C et C' sur les bissectrices des angles MFF' et MF'F tels que les milieux de BB' et CC' soient F et F' et que les cercles passant par B, B' et F' et par C, C' et F passent par M (les centres de ces cercles sont les intersections des médiatrices des segments MF et MF' avec le cercle circonscrit à M, F et F') ; ces 2 couples de points sont conjugués et ont pour tangentiels F et F' et les 4 points sont cocycliques, le centre du cercle étant le centre du cercle exinscrit dans l'angle en M du triangle FMF'.

Ce QC peut être appelé QC principal de la cubique circulaire focale de van Rees.



M) Coordonnées trilinéaires (cf A. Viricel (26))

- On a vu que l'équation de la tangente aux 3 courbes s'écrit, dans un système où le centre est le foyer pour la parabole et le centre du cercle fixe pour la deltoïde et la cardioïde et où l'axe des abscisses est un axe de symétrie de la courbe :
 - $x \cos \theta + y \sin \theta = p/2 \cos \theta$ pour la parabole
 - $r \cos 3\theta$ pour la deltoïde
 - $r \cos \theta/3$ pour la cardioïde
- Le 2^{ème} terme de l'égalité est, par définition, la distance de l'origine à la tangente.

On note que le changement de θ en $\theta + \pi$ ne change pas les 2 premières équations, alors qu'elle modifie la troisième ; la parabole et la deltoïde restent inchangées si l'on change la direction des droites, alors que la cardioïde n'est plus la même.

- Les distances d'un point à un ensemble de 3 droites constituent un système de coordonnées trilinéaires ; si les 3 droites portent les côtés d'un triangle, il suffit de multiplier les coordonnées trilinéaires par la largeur du côté correspondant pour passer à un système de coordonnées barycentriques proportionnel aux surfaces délimitées dans le triangle par le point et les sommets. Clark Kimberling pratique le système de coordonnées trilinéaires (tout en fournissant les 2 valeurs) pour les points remarquables du triangle dans son site ETC Encyclopedia of the Triangle Centers et on a vu que Chris van Tienhoven utilisait le système de coordonnées barycentriques pour les éléments remarquables des quadrangles et quadrilatères dans son site EQC Encyclopedia of Quadrifigures.
- Si l'on appelle a, b et c les longueurs des 3 côtés du triangle de référence ABC, X, Y et Z les coordonnées barycentriques et x, y et z les coordonnées trilinéaires, on a l'équivalence $X/ax = Y/by = Z/cz$; l'équation du cercle circonscrit à ABC est alors $a^2YZ + b^2XZ + c^2XY = 0$ en barycentriques et $ayz + bxz + cxy = 0$ en trilinéaires et celle d'une droite est $uX + vY + cZ = 0$ en barycentriques et $u'x + v'y + c'z = 0$ en linéaires avec $u' = au, v' = bv$ et $w' = cw$.
- On peut utiliser ce système de 2 manières, d'abord en rapprochant 2 points de même nature pour décrire le lieu des 3 centres (foyer de la parabole et centres des cercles inscrits dans la deltoïde ou la cardioïde) pour un triangle T_i donné et ensuite en rapprochant 2 de ces 3 points pour préciser leur position relative.
- La distance de M à D_j est $p/2 \cos \theta_j$; on a (partie A) $A_jkA_{jl} = 2 R_i \sin (\theta_l - \theta_k)$ et $OkOl = 2 r \sin (\theta_l - \theta_k)$. Il vient, en développant, $\sum \cos \theta_j \sin (\theta_l - \theta_k) = 0$, ce qui prouve que M appartient à la fois aux cercles C_i et au cercle C.
- Si M est au point A' , diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit, l'axe de la parabole est perpendiculaire à BC ; la droite de Simson de A' est le côté BC et la droite de Steiner est parallèle à BC, elle passe par l'orthocentre H (le milieu de HA' est sur BC). On a $\theta_j = 0, \theta_k = -\langle C \rangle, \theta_l = \langle B \rangle$ et $p = 4r \cos B \cos C$.

- Dans le repère d'origine A' et d'axe des abscisses la perpendiculaire à BC, pour un point M foyer d'une seconde parabole tangente aux 3 droites Dj, Dk et Dl, on appelle φ l'angle entre son axe et celui de la première parabole de foyer A' (perpendiculaire à BC).
 - La distance de M à la directrice de la seconde parabole est p, celle de M à la tangente au sommet est p/2, celles de M aux 3 droites sont respectivement $p/2\cos\varphi$, $p/2\cos(\varphi-C)$ et $p/2\cos(\varphi+B)$. La tangente au sommet est la droite de Simson de M par rapport au triangle ABC ; elle se déduit de BC dans la similitude de centre M, d'angle φ et de rapport $\cos\varphi$ et contient les projections de M sur les 3 côtés, qui sont alignées. L'angle $\angle A'M$ vaut $-\varphi$ et $p = 4R\cos\varphi\cos(\varphi-C)\cos(\varphi+B)$; on a pour $\varphi = 0$, $p = 4R\cos B\cos C$, pour $\varphi = \pi+C$, $p = 4r\cos C\cos A$ et, pour $\varphi = \pi-B$, $p = 4R\cos A\cos B$.
 - Si on considère 4 droites Di, il existe une parabole de foyer M tangente à ces 4 droites et M appartient à chacun des cercles Ci. Chaque droite fait un angle $\pi/2 + \theta_i$ avec l'axe de la parabole, la distance p de M à la directrice est $p = 8r\Pi\cos\theta_i$ et la distance de M à chaque droite est $p_i = 4r\Pi\cos\theta_j = p/2\cos\theta_i$. Pour chaque triangle Ti, on retrouve bien $R_i = 2r\cos\theta_i$, $p = 4R_i\Pi\cos\theta_j$ et $p_j = p/2\cos\theta_j = 2R_i\cos\theta_k\cos\theta_l$.
-
- On applique la même démarche à la deltoïde en identifiant d'abord le centre H_0 de la deltoïde dont un axe de symétrie est perpendiculaire à BC. Les distances de H_0 à Dj, Dk et Dl sont r, $r\cos 3C$ et $r\cos 3B$. Pour une seconde deltoïde dont un des axes de symétrie fait un angle φ ($\neq \pi/3$) avec un de ceux de la première, les distances de son centre H aux 3 droites sont $r'\cos 3\varphi$, $r'\cos 3(\varphi-C)$ et $r'\cos 3(\varphi+B)$.
 - Les coordonnées trilineaires de H s'écrivent $\cos 3\varphi$, $\cos 3\varphi\cos 3C + \sin 3\varphi\sin 3B$ et $\cos 3\varphi\cos 3B - \sin 3\varphi\sin 3B$ et, en divisant par $\cos 3\varphi$, il vient

$$1 \quad 0$$

$$\cos 3C + \frac{\sin 3C}{\cos 3B} \tan 3\varphi, \text{ ce qui constitue l'équation d'une droite.}$$

$$\cos 3B \quad - \sin 3B$$
On a pour $\varphi = \pi+C$ ($\cos 3C$; 1 ; $-\cos 3A$) et pour $\varphi = \pi-B$ ($\cos 3B$; $-\cos 3A$; 1), çàd les deltoïdes dont un axe de symétrie est perpendiculaire à l'un des 2 autres côtés ; on a surtout, pour $\varphi = \frac{1}{3}(B-C)$, [$\cos(B-C)$; $\cos(C-A)$; $\cos(A-B)$] , çàd le point Ni, milieu du segment d'Euler OiHi joignant l'orthocentre au centre du cercle circonscrit, et la deltoïde est alors la H3ST du triangle Ti, dont le cercle intérieur est le cercle d'Euler de ce triangle.
 - Si l'on considère le QC et les 4 droites Di, le point H, centre de la deltoïde est situé à l'intersection des 4 médiatrices des segments d'Euler des 4 triangles Ti, ce qui constitue le théorème de Kantor- Hervey.
 - Pour identifier, dans le repère ayant le foyer de la parabole comme origine et son axe comme axe des abscisses, les coordonnées du centre de la deltoïde, le rayon du cercle inscrit et l'angle φ entre un de ses axes et celui de la parabole, on écrit la distance de H à chaque droite Di : $x_H \cos \theta_i + y_H \sin \theta_i - p/2\cos\theta_i = r \cos 3(\theta_i - \varphi)$. Avec $x_H = r [\cos \Sigma \theta_i + \Sigma \cos(\Sigma \theta_i - 2\theta_i)]$ et $y_H = r [\sin \Sigma \theta_i + \Sigma \cos(\Sigma \theta_i - 2\theta_i)]$, ce qui exprime que H est l'orthocentre du QI formé par les Oi, et $\varphi = 1/3 \Sigma \theta_i$, on peut vérifier qu'il reste, après l'élimination du terme en θ_i l'expression suivante : $r \cos \Sigma \theta_j + r \Sigma \cos(\Sigma \theta_j - 2\theta_j) = 4r \Pi \cos \theta_j = p/2\cos\theta_i$.

- On applique enfin la même méthode à la cardioïde, en identifiant le centre E_0 de la cardioïde dont l'axe de symétrie est perpendiculaire à BC. Les distances de E_0 à D_j, D_k et D_l sont $3r, 3r \cos(C+2k\pi)/3$ et $3r \cos(B+2k\pi)/3$, k prenant les valeurs 0, 1 ou 2. Pour une seconde cardioïde, dont l'axe fait un angle φ avec celui de la première, les distances de son centre E aux 3 droites sont $3r' \cos(\varphi+2k\pi)/3$, $3r' \cos(\varphi-C+2k'\pi)/3$ et $3r' \cos(\varphi+B+2k''\pi)/3$.
- Un système trilinéaire s'écrit alors

$$\cos(\varphi+2k\pi)/3, \cos(\varphi-C+2k'\pi)/3 \text{ et } \cos(\varphi+B+2k''\pi)/3$$
et, en divisant cette fois par $\cos(\varphi+2k\pi)/3$, il vient

$$1 + \frac{\cos(C+2(k'-k)\pi)/3}{\cos(B+2(k'-k)\pi)/3} + \frac{\sin(\varphi+2k\pi)/3}{\sin(B+2(k'-k)\pi)/3} = \frac{\sin(C+2(k'-k)\pi)/3}{\sin(B+2(k'-k)\pi)/3} \quad 0$$
- k, k' et k'' prenant les valeurs 0,1 ou 2, $k' - k$ et $k'' - k$ prennent les mêmes valeurs en raisonnant $m^\circ 3$ (car $-1 = 2$ et $-2 = 1 m^\circ 3$). L'écriture ci-dessus constitue l'équation de 9 droites, chacune correspondant à un couple ($k' - k ; k'' - k$) ; en faisant $\varphi = C$ et $\varphi = -B$, on retrouve les cardioïdes d'axes perpendiculaires aux 2 autres côtés (çàd bitangentes à ces côtés).
- Comme on le sait, ces 9 droites constituent le maillage de Morley : elles sont 3 par 3 parallèles à la direction moyenne des 3 côtés du triangle $m^\circ \pi/3$, elles déterminent 27 triangles équilatéraux et se coupent en 27 points sommets de ces triangles et centres des cardioïdes bitangentes à l'un des côtés du triangle ABC. Si l'on considère le QC et les 4 droites D_i , les centres des cardioïdes tangentes à ces 4 droites sont à l'intersection des 4 maillages de Morley des 4 triangles T_i .
- Pour identifier, dans le même repère (foyer comme origine et abscisses sur l'axe de la parabole), les coordonnées du centre de la cardioïde, le rayon du cercle inscrit et l'angle φ entre un de ses axes et celui de la parabole, on écrit la distance de E à chaque droite D_i : $x_E \cos \theta_i + y_E \sin \theta_i - p/2 \cos \theta_i = 3r \cos 1/3(\theta_i - \varphi + 2k\pi)$. Pour un ensemble de k donnés, on a toujours à résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues ; k étant en fait une différence entre 2 termes pouvant prendre les 3 valeurs 0,1 ou 2, il y a 3 degrés de liberté pour les 4 droites e , au total, $3*3*3 = 27$ systèmes différents avec 27 solutions. Par exemple, si l'on considère le triangle T_i , il y a $3*3 = 9$ droites différentes correspondant au maillage de Morley et à la fixation des $k' - k$ et $k'' - k$ pour D_j, D_k et D_l ; la fixation de k pour D_i donne 3 solutions différentes pour chacune des 9 droites, soit 27 solutions au total.
- Ainsi, chacune des 9 droites d'un des 4 maillages recoupe chaque droite d'un second maillage en un point et il y a au total $9*9 = 81$ points d'intersection. Le centre d'une cardioïde tangente à 4 droites appartient nécessairement aux 4 maillages, çàd se situe à l'intersection de 4 droites, une de chaque maillage ; mais réciproquement, l'intersection de 2 maillages peut être le centre d'une cardioïde tangente aux 4 droites ou le centre de 2 cardioïdes différentes tangentes aux 3 côtés de 2 des 4 triangles de référence. On peut noter alors que chacune des $4*9 = 36$ droites des 4 maillages porte 3 points centres des cardioïdes tangentes aux 4 droites ; pour un même maillage, les 3 directions des droites de Morley sont différentes (k prenant les valeurs 0,1 et 2).

Au total, il y a 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i ; leurs centres sont situés à l'intersection des 4 maillages de Morley des triangles de référence T_i , chacun des 27 centres étant sur 4 droites et chacune des 36 droites portant 3 centres.

N) Coordonnées complexes et géométrie inversive

(cf articles de F. Morley (9), P. S. Wagner (20), R. Goormaghtigh (23) et A. Bogomolny(27))

- On a toujours M, foyer de la parabole, comme origine, Mx, axe de symétrie de la parabole, comme axe des abscisses et My, parallèle en M à la directrice de la parabole Δh , comme axe des ordonnées.
 - Les points A_{ij} ont comme coordonnées $z_{ij} = (4r \cos \theta_i \cos \theta_j ; \theta_i + \theta_j)$ ou encore $z_{ij} = (p/2 \cos \theta_i \cos \theta_j ; \theta_i + \theta_j) = p/2 [(1 - \tan \theta_i \tan \theta_j) + i (\tan \theta_i + \tan \theta_j)]$. On vérifie facilement que A_{ij} , A_{ik} et A_{il} sont alignés sur une droite D_i .
 - Les similitudes S_i et s_i s'expriment respectivement par $z' = z (1/2 \cos \theta_i, \theta_i)$ ou $x' + iy' = 1/2 \cos \theta_i (x + iy)(\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$ et par $z' - z_{oi} = (z - z_{oi})(1/\cos \theta_i, \theta_i)$ ou $z' - z_{oi} = 1/\cos \theta_i (z - z_{oi})(\cos \theta_i + i \sin \theta_i)$. On a $O_i = S_j(A_{kl})$, $O = S_i(O_i)$, $z_{oi} = (2r \cos \theta_i ; \sum \theta_i - \theta_i)$ et $z_o = (r ; \sum \theta_i)$ et on vérifie aisément que M, A_{jk} , A_{jl} et A_{kl} sont sur un cercle de centre O_i et rayon $R_i = 2r \cos \theta_i$ et que M et les O_i sont sur un cercle de centre O et rayon r.
 - On calcule $z_{hi} = \sum z_{ajk} - 2 z_{oi}$, $z_h = \sum z_{oi} - 3 z_o$, $z_{ni} = 1/2 (z_{oi} + z_{hi})$ et enfin $z_n = 1/2 (z_o + z_h)$ et on retrouve les propriétés mises en évidence précédemment :
 - alignement des milieux des points A_{ij} et A_{kl} sur la droite de Newton
 - alignement des points H_i sur la droite de Steiner-Miquel
 - concurrence des médiatrices des segments $O_i H_i$ en H, car $z_h = s_i(N_i)$
 - appartenance de N à la droite de Newton
 - identification du point de Morley H' avec l'isobarycentre des points H_i .
-
- La géométrie inversive considère toute courbe rationnelle comme l'image par inversion du cercle unitaire de centre l'origine et de rayon l'unité. Au lieu d'exprimer les coordonnées cartésiennes X et Y d'un point comme des fonctions algébriques d'un paramètre réel, on exprime directement la variable complexe $x = X + iY$ comme fonction algébrique d'un nombre complexe t du cercle unitaire appelé *turn*. Le nombre complexe conjugué de x est $y = X - iY$ et x et y sont appelées coordonnées circulaires du point de coordonnées cartésiennes X et Y.
 - Ainsi, on détermine une ligne droite par le point symétrique de l'origine par rapport à cette droite, de coordonnée x_1 et l'équation de la droite s'écrit $x = t_1 x_1 / (t_1 - t)$; on peut choisir t_1 de manière arbitraire comme égal à y_1 / x_1 et l'équation de la droite devient $x t_1 + y = x_1 t_1$ (ce qui implique $t = -y/x$). Le point d'intersection de 2 droites a pour coordonnées $x_{12} = (y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$.
 - On détermine un cercle par $x = a_1 - a_2 t$, a_1 étant le centre et $|a_2|$ le rayon. Pour 3 droites déterminées par x_1 , x_2 et x_3 , l'équation $x = \sum x_i t_i / \prod (t_i - t_j)$, avec i et j allant de 1 à 3 et $j \neq i$, définit un cercle, qui passe manifestement par les 3 points x_{12} , x_{13} et x_{23} . C'est le cercle circonscrit aux 3 points, dont on peut expliciter le centre $a_1 = \sum x_i t_i^2 / \prod (t_i - t_j)$ et le rayon $|a_2| = \sum x_i t_i / \prod (t_i - t_j)$, avec i et j allant de 1 à 3 et $j \neq i$. On peut étendre ces expressions à n droites et définir les n constantes caractéristiques du n-droites $a_k = \sum x_i t_i^{n-k} / \prod (t_i - t_j)$, avec i, j et k allant de 1 à n et $j \neq i$ et leurs conjuguées b_k obtenues en remplaçant t_i par $1/t_i$.

- Pour ne donner qu'un seul exemple d'application de la méthode, le cercle d'équation $x = a_1 - a_2 t$ contient toujours les n centres des cercles des $n-1$ droites obtenus en omettant une des n droites ; l'équation est la même, mais les coefficients a_1 et a_2 diffèrent (il faudrait écrire $a_1(n)$ et $a_2(n)$). Mieux encore, tous les cercles de rang $n-1$ passent par un même point $x = a_1 - a_2 b_3/b_2$; ce point est le nœud du limaçon de Pascal d'équation $x = a_1 - 2a_2 t + a_3 t^2$, qui est l'enveloppe de ces cercles, appelés par Morley pénosculants du limaçon.
- En prenant comme cercle de base le cercle directeur des courbes, la méthode est particulièrement adaptée à l'étude des hypocycloïdes et des épicycloïdes ; en effet, en prenant t comme point primaire, le point secondaire tournant à une vitesse n fois plus grande est simplement t^n ou $1/t^n$ et le signe est positif ou négatif selon que les points tournent dans le même sens (épicycloïdes) ou en sens inverse (hypocycloïdes).
- Selon cette méthode, l'équation d'une H_{n+1} ou hypocycloïde à $n + 1$ points de rebroussement s'écrit $(n - 1) x = nt - 1/t^n$, l'équation du premier pénosculant en t_1 est donnée par $(n - 1) x = t_1 + (n - 1) t - 1/t_1 t^{n-1}$ et celle du second pénosculant (premier pénosculant en t_2 du premier pénosculant en t_1 ou premier en t_2 du premier en t_1) par $(n - 1) x = t_1 + t_2 + (n - 2) t - 1/t_1 t_2 t^{n-2}$; ce sont donc aussi des hypocycloïdes et l'on peut continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'une équation complètement polarisée $(n - 1) x = \sum t_i - 1/\prod t_i$. Si l'un des t_i est variable, cette équation est celle d'une droite pénosculante et si tous les t_i sont fixés, c'est l'équation du point pénosculant, par lequel passent les n droites pénosculantes des $(n-1)$ -droites obtenus en omettant une des n -droites.
- Pour $n = 2$, on trouve la H_3 ou deltoïde, d'équation ponctuelle $x = 2t - 1/t^2$ et d'équation tangentielle $t^3 - xt^2 + yt - 1 = 0$ (avec y conjugué de x). On a encore, pour $n = 3$, la H_4 ou astroïde, d'équation $2x = 3t - 1/t^3$ et, pour $n = 4$, la H_5 d'équation $3x = 4t - 1/t^4$...
- De même, l'équation de la E_n ou épicycloïde à $n - 2$ points de rebroussement s'écrit $x = (n - 1) t - (n - 2) t^n$. Pour $n = 3$, on trouve la E_1 ou cardioïde, d'équation ponctuelle $x = 2t - t^2$ et d'équation tangentielle $x - 3t + 3t^2 - yt^3 = 0$. Pour $n = 4$, on a la E_2 ou néphroïde, d'équation ponctuelle $x = 3t - t^3$ et d'équation tangentielle $x - 4t + 6at^2 - 4t^3 + yt^4 = 0$...
- Trois généralisations au n -droites sont maintenant possibles en utilisant la méthode de la géométrie inversive ; un ensemble de n droites est composé de $n-1$ droites obtenus en éliminant une des n droites comme le QC formé par 4 droites D_i contient 4 triangles T_i et leurs cercles circonscrits et comme le triangle formé par 3 droites contient 3 couples de droites et leurs points d'intersection.
- La première généralisation est celle de la chaîne de Clifford : les 5 points de Miquel d'un 5-droites sont sur un même cercle, appelé cercle de Clifford et les 6 cercles de Clifford d'un 6-droites passent par un même point (point de Clifford), les 7 points de Clifford d'un 7-droites sont sur un même cercle et ainsi de suite en alternant les points et les cercles selon la parité de n . On peut noter que le cercle de 5 points de Miquel du 5-droites se réduit à une droite, appelée droite de Miquel du 5-droites, si les 5 droites sont tangentes à une même H_3 , cette propriété découlant directement de la notion de triangle $T(\theta)$ inscrit dans la H_3 , 2 des tangentes étant 2 droites de Simson généralisées pour le triangle formé par les 3 autres (cf supra).

- La seconde généralisation porte sur les points M, O et H du QC.
 - On a déjà vu que les n cercles de centres O_i ($n - 1$) passent par un même point M_n , appelé foyer du n -droites, et que leurs centres sont sur un même cercle de centre O_n (théorème de Longchamps). On note que le point M_n n'est pas, en général, sur le cercle des centres ; dans ce cas, on a vu que l'enveloppe des n cercles passant par un point commun M_n et dont les centres O_i ($n - 1$) sont sur un même cercle de centre O_n est un limaçon de Pascal ayant M_n comme nœud et O_n comme centre du cercle fixe.
 - Le point de Kantor-Hervey H_n du n -droites est l'orthocentre, défini par l'égalité $\mathbf{OnHn} = \sum \mathbf{OnOi}$, i allant de 1 à $n-1$, du quadrilatère formé par les n O_n-1 . Le rapport entre les distances de H_n à O_{n-1} et H_{n-1} est le même pour tous les $n-1$ droites (on notera $\lambda_n = H_n O_i$ ($n-1$) / $H_n H_i$ ($n-1$)) et il est égal au rapport du rayon du cercle des centres à la distance du centre de ce cercle au foyer du n -droites ; on a $\lambda_n = O_n O_i$ ($n-1$) / $O_n M_n$. On aura $\lambda = 1$ dans le cas où les n droites sont tangentes à une parabole, M_n sera sur le cercle des centres et H_n sera sur toutes les médiatrices des segments d'Euler des n ($n-1$)-droites O_i ($n-1$) H_i ($n-1$). Dans le cas de n (supérieur ou égal à 4) droites tangentes à une H_3 , tous les H_n seront confondus avec le centre du cercle inscrit dans la H_3 .
- La troisième généralisation, et de loin la plus ambitieuse, porte sur les courbes C_n qui jouent, pour n droites, le rôle du point pour 2 droites, du cercle pour 3 droites et de la cardioïde pour 4 droites. Morley définit progressivement les axes de symétrie ou courbes C_0 , les centres ou courbes C_1 , intersections des axes de symétrie des n ($n-1$)-droites, les cercles ou courbes C_2 , contenant les centres des n ($n-1$)-droites, les cardioïdes ou courbes C_3 , enveloppes des cercles des n ($n-1$)-droites et les courbes de rang supérieur, chaque courbe C_n étant l'enveloppe des n courbes C_{n-1} et étant un osculant de courbes C_{n+1} . Ainsi, une droite est son propre axe de symétrie, 2 droites ont 2 axes de symétrie et un centre à leur intersection, 3 droites ont 9 axes de symétrie (les droites du maillage de Morley), 4 centres des cercles inscrits et exinscrits et 1 cercle circonscrit, 4 droites formant le QC ont 64 axes de symétrie, 27 centres des cardioïdes tangentes aux 4 droites, 8 cercles portant les 16 centres des cercles inscrits et exinscrits des 4 triangles et 1 cardioïde tangente aux 4 cercles circonscrits, chaque cercle passant par le point de rebroussement de la cardioïde. Pour 5 droites, il y a 16 cardioïdes enveloppant les 40 cercles, chaque cardioïde enveloppant 5 cercles et chaque cercle étant tangent à 2 cardioïdes et une C_4 ou néphroïde enveloppant les 5 cardioïdes tangentes aux C_i des 5 QC, chaque cardioïde passant par les 2 points de rebroussement de la néphroïde ; il y a, en outre, 135 cardioïdes tangentes aux D_i des 5 QC et leurs centres sont sur 81 cercles à raison de 5 centres par cercle et de 3 cercles passant par chaque centre. Un n -droites a n^{n-1} axes de symétrie, $(n-1)^{n-1}$ centres, $(n-2)^{n-1}$ cercles, $(n-3)^{n-1}$ cardioïdes, $(n-k)^{n-1}$ courbes de rang k et 1 courbe de rang $n + 1$...

Pour le QC, la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i circonscrits aux triangles de référence T_i mérite le nom de mono-cardioïde de Morley et les 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i celui de multi-cardioïdes de Morley.

Résumé et remarques

Le quadrilatère complet ou QC, formé par 4 droites D_i et leurs 6 points d'intersection A_{ij} , est une figure fascinante, étudiée en détail notamment par Jakob Steiner en 1828.

- Les cercles circonscrits aux 4 triangles de référence T_i formés par ces droites prises 3 par 3 ont un point commun M , foyer de la parabole tangente aux 4 droites et appelé point de Miquel du QC.
- Ce point M et les centres O_i de ces cercles circonscrits sont sur un même cercle de centre O et de rayon r , appelé cercle de Miquel du QC.
- Les orthocentres H_i des triangles T_i sont alignés sur la directrice de la parabole, appelée droite de Steiner-Miquel du QC.
- Les médiatrices des segments $O_i H_i$ sont concourantes en un point H , centre du cercle de rayon r inscrit dans la H_3 tangente aux 4 droites, orthocentre du QI formé par les O_i et appelé point de Kantor-Hervey du QC ; H se projette sur la directrice en un point H' , barycentre des H_i et appelé point de Morley du QC.
- Les milieux des diagonales sont alignés sur la droite de Newton du QC, qui passe par les milieux N de OH et N' de OH' .
- Les coniques inscrites dans le QC ont leurs centres sur la droite de Newton et leurs foyers sur la cubique circulaire focale de van Rees, qui passe par les A_{ij} et par M .

En outre, on a identifié

- une parabole tangente aux 4 D_i et ayant δ comme tangente au sommet et une parabole associée passant par les points de contact de la première avec les D_i .
- une deltoïde tangente aux 4 droites D_i ; elle se déduit de chacune des 4 H_3 de Steiner des triangles T_i par une similitude s_i de rapport $1/\cos\theta_i$ et d'angle $1/3 \theta_i$.
- Pas moins de 28 cardioïdes, l'une tangente aux 4 C_i et les 27 autres tangentes aux 4 D_i ; la première a son centre en O et son point de rebroussement en M et les 27 autres ont leurs centres à l'intersection des 4 maillages de Morley des triangles T_i .
- Ces 27 centres appartiennent à la cubique de Eckart.
- Les correspondances entre ces courbes sont tout à fait remarquables :

L'axe de la parabole est parallèle à la droite de Newton et la droite symétrique de cet axe par rapport à la droite de Newton est tangente à la deltoïde.

Si l'on appelle θ_i les angles orientés entre la droite de Steiner et les 4 droites D_i , l'angle entre l'axe de la parabole et l'axe de la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i est $\Sigma\theta_i$ et les angles entre l'axe de la parabole et les axes de la deltoïde sont $1/3 \Sigma\theta_i \text{ mod } \pi/3$.

La direction des asymptotes de la cubique de Eckart des 27 centres des cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i est parallèle à celle des axes de la deltoïde tangente aux 4 droites D_i et des trisectrices de l'angle entre les axes de la parabole et de la cardioïde. La tangente à la deltoïde parallèle à la droite de Newton est l'asymptote à la cubique de Van Rees et l'axe de la cardioïde tangente aux 4 cercles C_i est la tangente à cette cubique passant par le point de Newton.

On peut préciser la construction du QC de 2 manières, la première à partir d'un triangle T_i donné et d'une 4^{ème} droite D_i variable, la seconde à partir d'un QI des O_i fixe et d'un point M variable.

- Pour un triangle T_i donné, on a 3 droites D_j , D_k et D_l ; pour identifier le quadrilatère complet, il faut la 4^{ème} droite D_i (la seule avec les 3 autres à être tangente simultanément à la parabole et à la H_3) ou les 2 points M et H , qui déterminent respectivement la parabole et la H_3 ou un point double O ou N , qui détermine à lui seul les 2 courbes.
 - si on donne M , la parabole est identifiée ; le lieu de O est la médiatrice de MO_i , celui de h_i la médiatrice de MH_i et celui de N la médiatrice de $oiNi$.
 - si on donne H , la H_3 est identifiée (θ_i et $r = Ri/2\cos \theta_i$ sont connus) ; le lieu de O est le cercle de centre O_i et de rayon r , celui de N le cercle de centre le milieu de HO_i et de rayon $r/2$.
 - si on donne O , la parabole et la H_3 sont identifiées (M est sur le cercle C_i de rayon ri et sur le cercle C de centre O et de rayon $r = OO_i$ et H est connu, car θ_i est donné par $\cos \theta_i = Ri/2r$).
 - si on donne N , la parabole et la H_3 sont encore identifiées, car on a h_i symétrique de O_i par rapport à N ; comme h_i est sur la médiatrice de MH_i , M est déterminé sur C_i en faisant $hiHi = hiM$ et le triangle $MhiHi$ donne l'angle θ_i et donc O et H .
- Pour un ensemble de 4 O_i donné, O , N , H , C et Γ sont connus ; M décrit le cercle C et détermine un ensemble de QC semblables par morceaux, chaque T_i étant semblable au t_i fixe. Les points A_{ij} sont les symétriques de M par rapport à O_iO_j et décrivent les cercles symétriques de C et les milieux des $A_{ij}A_{kl}$ décrivent des cercles de centre N . On peut noter que pour M' diamétralement opposé à M sur le cercle C , les D'_i sont les perpendiculaires aux D_i par les points h_i (elles passent par les points q'_i) ; la droite de Newton $\tilde{A}n$ et la droite des orthocentres $\tilde{A}h$ sont les mêmes, les orthocentres H'_i étant les symétriques des H_i par rapport à H' et la distance de M' à $\Delta'h$ est $p' = 8r\Pi\cos \theta'_i = 8r\Pi \sin \theta_i$. La H_3 tourne de $\pi/3$ et devient la symétrique de la H_3 des D_i par rapport aux perpendiculaires en H à ses axes de symétrie. En particulier, quand M passe par O_i , le QC dégénère en un point O_i et sa droite de Steiner D_i par rapport au triangle t_i ; quand il est en O'_i , la H_3 est la H_3 de Steiner du triangle T'_i .
- Enfin, pour un triangle T_i fixe donné, la droite D_i étant variable, le point M , foyer des paraboles tangentes aux 3 côtés, décrit le cercle C_i circonscrit à T_i , le point H , centre du cercle inscrit dans les H_3 tangentes aux 3 côtés, décrit la médiatrice du segment d'Euler O_iH_i et le point E , centre des cardioïdes tangentes aux 3 côtés, appartient au maillage des $3*3$ droites de Morley ; les médiatrices des segments HiM ainsi que les cercles inscrits dans les deltoïdes ont pour enveloppe une même conique de foyers O_i et H_i (ellipse pour un triangle acutangle , sinon hyperbole).

On peut encore formuler à ce stade 2 remarques :

- Le premier à avoir explicité la propriété de concurrence des médiatrices des segments d'Euler est Hervey (8) ; ce point est donc légitimement appelé point de Hervey. Toutefois V. Thébault (21) a proposé de lui attribuer plutôt le nom de Kantor-Hervey, Kantor (7) ayant mentionné la même propriété de manière un peu plus allusive auparavant ; on trouve aussi parfois l'appellation de point de MacBeath (24), due à J. Conway (les médiatrices d'Euler étant même appelées droites de MacBeath). Un bon historique du point de Kantor-Hervey figure dans l'article de J.L. Aymé (33).
- La conique enveloppe des cercles inscrits dans les H_3 tritangentes a été étudiée à l'origine par Serret (4) et mentionnée par Bickart (12) ; elle porte aujourd'hui le nom de conique de MacBeath (24).

Tableau récapitulatif des éléments remarquables

Nature	Légende	Nom	Propriété	EQF	Sym/N	Conj Cl-Schmidt
Points	Aij		6 sommets du QC			Akl autre sommet
	Oi		4 centres des Ci		hi	
	Hi		4 orthocentres des Ti			
	hi		4 orthocentres des ti		Oi	
	M	Miquel	point des Ci et de C	P1	h0	M
	O		centre de C	P4	H	
	H	KantorHervey	centre de Γ	P3	O	
	H'	Morley	barycentre des Hi	P2		
	N	Clawson	milieu de OH	P5	N	
	B		barycentre des Aij	P12		
	G	Dimidium	barycentre des Oi	P6	G'	
	G'		barycentre des hi		G	
	NS	NewtonSteiner	sur Δn et Δh	P7		
	S1, S2 et S3		sur coniques des 9 pts			
	F et F'		sur Δn et van Rees			F' et F
Droites	Di		4 droites du QC			cercle Ci
	Δn	Newton	milieux diagonales	L1	Δn	cercle par M et F, F'
	Δh	Steiner M/Ti	directrice de parabole	L2	// à Δh	cercle C
	δ	Simson M/Ti	tgte sommet de parab	L3		cercle tgt cardioïde
	Δi		tangentes à cardioïde			
Triangles	Ti		4 triangles AjkAjLAkl	CT		
	ti		4 triangles OjOkOl			
	t'i		4 triangles hjhkh			
	T'i		antimédians des t'i			
	$\alpha\beta\gamma$	1er diagonal	perspective avec Ti	DT		
	$\lambda\mu\nu$	2nd diagonal	perspective avec Ti			
Cercles	Ci		4 circonscrits aux Ti			droite Di
	C	Miquel	cercle des centres Oi	Ci3	Γ	droite Δh
	Γ	Hervey	cercle des hi	Ci4	C	
		Plücker	centre N par M	Ci5		droite
		Dimidium	centre G - M et les S	Ci6		droite
Coniques	Parabole		tangente aux 4 Di	Co1		cardioïde mono-Morley
	Par associée		par 4 points de tgce	Co2		
	3 coniques des 9 points		milieux des segments			
Cubiques	van Rees		6 sommets et M	Cu1		invariante par Cl-S
	Eckart des 27 centres		centres des cardioïdes	Cu2		
Quartiques	Deltoïde	Kantor-Hervey		Qu2		parabole tgte aux 4 Di
	Cardioïde mono-Morley		tangente aux 4 Ci	Qu1		
	Cardioïdesmulti-Morley		tangentes aux 4 Di	27Qu1		

Bibliographie

(On trouvera dans les articles de Jean-Pierre Ehrmann, John Wentworth Clawson et Jean-Louis Aymé et sur le site de Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadricenters de nombreuses autres références non reprises)

Pères fondateurs

- (1) J. Steiner 1827 Théorème sur le Quadrilatère Complet Annales de Gergonne
- (2) Van Rees 1829 Mémoire sur les focales
- (3) A. Miquel 1838 Théorèmes de géométrie Journal de mathématiques de Liouville

Anciens

- (4) P. Serret 1865 questions 737 et 738 nouvelles annales de mathématiques
- (5) Crémona 1864 Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements journal de Crelle
- (6) Laguerre 1878 Sur la cardioïde et 1879 Sur quelques propriétés de la H3
- (7) S. Kantor 1879 Quelques théorèmes nouveaux sur la H3
- (8) F.R.J. Hervey 1891 problem 10088 and solution Mathematical questions and solutions from the Educational Times (reproduit dans l'article de J.L. Aymé)
- (9) Frank Morley 1900 On the metris geometry of the plane n-line
1902 Orthocentric properties of the plane n-line
1907 On reflexive geometry
1929 Extensions of Clifford's Chain Theory
1929 Inversive Geometry
- (10) Frank H. Loud 1900 Sundry metric theorems concerning n lines in a plane
- (11) Léon Ripert 1901 Notes sur la géométrie du quadrilatère
- (12) L. Bickart 1908 problème 1611 Revue de mathématiques spéciales
- (13) E. Liénard 1911 Sur un théorème de M. Hervey
- (14) J. Lemaire 1913 et 1918 Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (repris et développé dans l'ouvrage réédité en 1967 Hypocycloïdes et épicycloïdes Blanchard)
- (15) R. Goormaghtigh 1914 Mathesis (article cité par A. Oppermann et J.P. Ehrmann)
- (16) Sister Mary Gervase 1917 On the cardioïds fulfilling certain assigned conditions Catholic University of America
- (17) A. Oppermann 1919 Premiers éléments d'une théorie du QC Gauthiers-Villars
- (18) J.W. Clawson 1917 Points, Lines and Circles connected with the QC
1919 The complete Quadrilateral
1921 More theorems on the Complete Quadrilateral
- (19) R. Bricard 1923 Sur les droites moyennes d'un triangle
- (20) Paul Smith Wagner 1929 An extension to Clifford's chain

Modernes

- (21) Victor Thébault 1944 Sur le point de Kantor-Hervey et 1954 Concerning the QC
- (22) R. Goormaghtigh 1947 The Hervey point of the general n-line
- (23) Henry E. Fettis 1948 The complete quadrilateral
- (24) A.M. MacBeath 1948-1950 Deltoïd
- (25) Général Marmion 1956 Epi- ou hypocycloïdes semblables tangentes à 2,3 ou 4 droites Mathesis

Contemporains

- (26) André Viricel Le théorème de Morley A.D.C.S. 1993
- (27) Alex Bogomolny 1998 Doodling and Miracles - Morley's Pursuit of Incidence
1999 Lines, Circles and Beyond – On Motivation and Understanding
- (28) Jean-Pierre Ehrmann 2004 Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral
- (29) D. Roux et M. Tixier, 3 articles sur les cubiques, configurations de Reyes et involutions quadratiques dans Quadrature numéros 46, 47 et 65
- (30) Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane
- (31) Eckart Schmidt Das Steiner Dreieck von vier Punkten
Miquel-, Poncelet- und Bennett Punkt eines Vierecks
Geometrie auf der Zirkularkurve
- (32) Quadrature (problème numéro E274 des 4 médiatrices posé par F. Gaspalou dans le numéro 64 de la revue et solution de J.N. Pasquay publiée dans le numéro 73)
- (33) Jean-Louis Aymé 2003 Méthodes et techniques en géométrie ; à propos de la droite de Newton et 2011 Le point de Kantor-Hervey
- (34) Alain Levelut 2011 A Note on the Hervey Point of a Complete Quadrilateral

Ouvrages généraux

- (35) T. Lalesco La géométrie du triangle Vuibert 1952
- (36) H. Brocard et T. Lemoyne Courbes géométriques remarquables Vuibert 1919
- (37) J.D. Eiden Géométrie analytique classique Calvage et Mounet 2009

Bibliothèques et librairie

- Ces articles et ouvrages sont disponibles dans les bibliothèques de l'Université Pierre et Marie Curie (Institut Henri Poincaré et Jussieu) à Paris
- J'ai personnellement trouvé les ouvrages de T. Lalesco, A. Oppermann, J. Lemaire et A. Viricel à la librairie spécialisée Blanchard rue Médicis Paris 6ème

Sites Internet

- www.forumgeom.fau.edu, site Forum Geometricorum, articles de Jean-Pierre Ehrmann et Alain Levelut
- www.jl.ayme.pagesperso-orange.fr, articles de Jean-Louis Aymé
- www.numdam.org, site d'articles numérisés de la Bibliothèque Nationale de France : articles de Bricard, Kantor, Laguerre, Lemaire, Mention, Serret et Steiner
- www.mathworld.wolfram.com, site de mathématiques de référence de Eric Weisstein
- www.cut-the-knot.org, articles de Alex Bogomolny
- www.group.dcs.st-and.ac.uk, université de St Andrews (nombreuses biographies)
- www.faculty.evansville.edu, Encyclopedia of Triangle Centers - ETC, site de Clark Kimberling consacré aux points remarquables du triangle
- www.chrisvantienhoven.nl, Encyclopedia of Quadri-Figures, site de Chris van Tienhoven consacré aux points, lignes, courbes et transformations remarquables des quadrangles et quadrilatères
- www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr, site de Bernard Gibert consacré aux cubiques
- www.eckartschmidt.de, articles de Eckart Schmidt