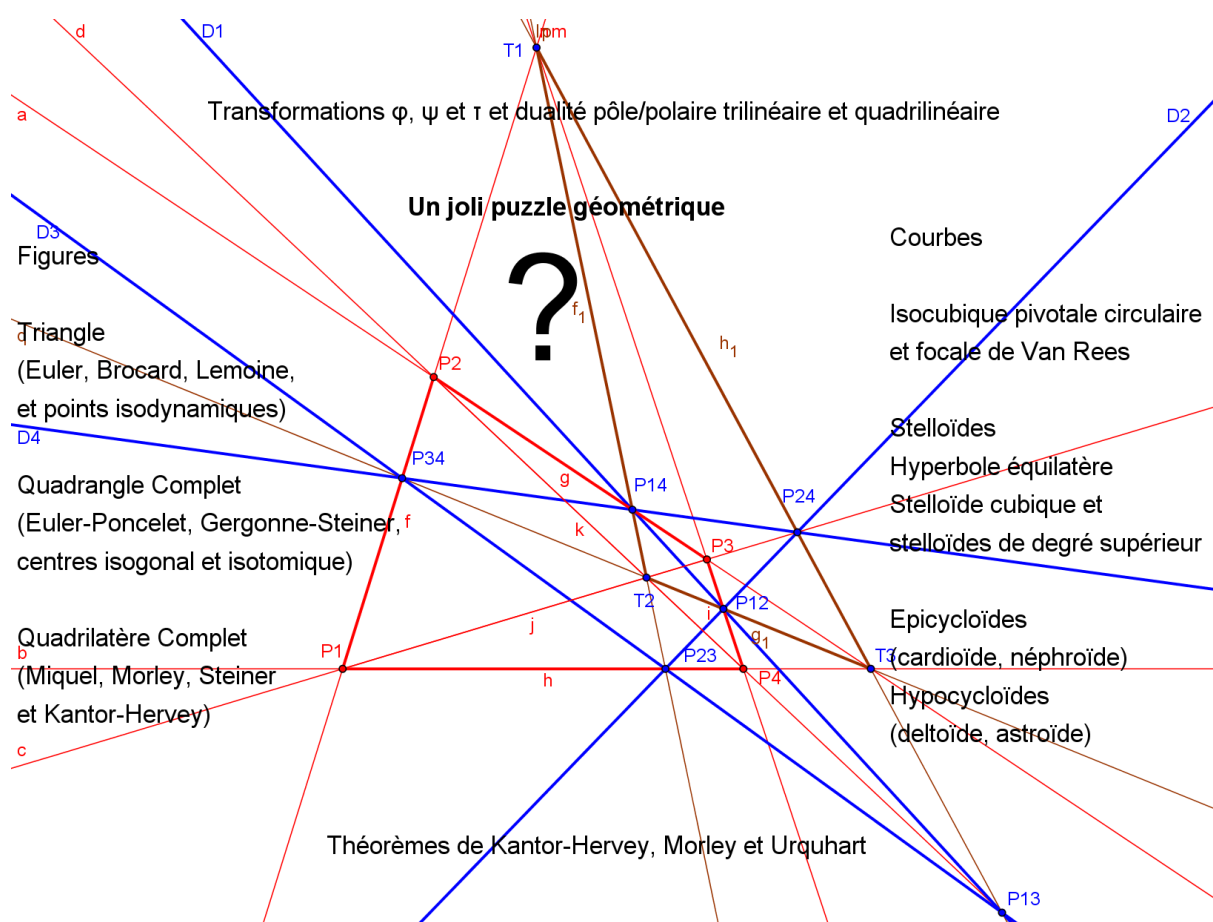


Le Buy (Dordogne 24), mai 2017

Bernard Keizer
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Un joli puzzle géométrique



Résumé

Cet article reprend dans les 4 articles précédents (*) 3 figures (triangle, quadrangle et quadrilatère complets), 3 transformations (ϕ du QA, ψ et τ du QC), 3 courbes (isocubique circulaire, stelloïde et épi- ou hypocycloïde) et 3 théorèmes (Kantor-Hervey, Morley et Urquhart). Chaque pièce trouve à la fin sa place dans ce joli puzzle géométrique.

Abstract

This article pops up in the 4 previous articles (*) 3 figures (triangle, complete quadrangle and quadrilateral), 3 transformations (ϕ of the QA, ψ and τ of the QL), 3 curves (circular isocubic, stelloïd and epi- or hypocycloïds) and 3 theorems (Kantor-Hervey, Morley and Urquhart). Each piece finds at the end its place in this beautiful geometrical puzzle.

Zusammenfassung

Dieser Artikel nimmt in den 4 vorigen Artikeln (*) 3 Figuren (Dreieck, Viereck und Vierseits), 3 transformationen (ϕ des VE und ψ und τ des VS), 3 Kurven (zirkulare Isokubik, Stelloïde und Epi- oder Hypozykloïde) und 3 Theoreme (Kantor-Hervey, Morley and Urquhart). Jedes Stück findet am Ende ihren Platz in diesem schönen geometrischen Puzzle.

Introduction

J'ai souhaité à des fins pédagogiques faire une courte présentation de mes 4 articles consacrés aux merveilleuses figures du triangle et du QA/QC et à leurs transformations et courbes associées. J'ai choisi de leur adjoindre 3 petits théorèmes parmi les joyaux de la géométrie pour montrer la profonde unité entre ces différents éléments, qui s'articulent en un joli puzzle géométrique.

Remerciements

Mes remerciements vont tout d'abord aux 4 mousquetaires du QC grâce auxquels cette aventure a commencé : dans l'ordre d'intervention Francis Gaspalou, Jean Moreau de Saint-Martin, Denis Fournier et Jean-Nicolas Pasquay. Ils vont ensuite à ceux qui m'ont permis de la continuer : Clark Kimberling pour le triangle, Chris van Tienhoven et son infatigable complice Eckart Schmidt pour le QA/QC (**) et Bernard Gibert pour les cubiques (***).

(*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014

Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation ψ 2015

Le Quadrangle et le Quadrilatère Complets comme figures duales et leurs isocubiques 2016

<http://bernardkeizer.blogspot.fr>

(**) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC www.faculty.evansville.edu

Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF www.chrisvantienhoven.nl

(***) Bernard Gibert Cubics in the Triangle Plane www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr

Démarche

L'ensemble de la démarche comprend 4 articles.

Le premier est consacré au Quadrilatère Complet, figure formée par 4 droites et étudiée par des générations de géomètres : Jakob Steiner, August Miquel, Frank Morley, John Wentworth Clawson, A. Oppermann, Léon Ripert, Jules Marchand ou récemment Jean-Pierre Ehrmann.

Il met en évidence les 10 propriétés décrites par Steiner, notamment :

- les cercles circonscrits aux 4 triangles de référence passent par le point de Miquel
- les centres de ces cercles sont sur le cercle de Miquel, qui passe aussi par ce point
- les orthocentres de ces triangles sont alignés sur la droite de Steiner
- les milieux des diagonales et les centres des coniques inscrites dans le QC sont alignés sur la droite de Newton.

Il présente les théorèmes de Kantor-Hervey et de Morley et introduit la parabole, la deltoïde et les 27 cardioïdes inscrites dans le QC, la cardioïde tangente aux 4 cercles circonscrits ainsi que la courbe circulaire focale de Van Rees, lieu des foyers des coniques inscrites dans le QC.

Le second traite de la stelloïde cubique (Mac Cay ou Kjp) et de sa hessienne, lieu des points où la conique polaire dégénère en 2 droites (monocursale ou bicursale).

Il apparaît que le lieu des centres des 27 cardioïdes inscrites dans le QC (ces points sont les intersections des maillages de Morley des 4 triangles de référence) est précisément la stelloïde cubique conjuguée du QC mentionnée par Jules Marchand ; cette courbe a comme réseau de coniques polaires les hyperboles équilatères qui coupent harmoniquement toutes les droites joignant 2 points conjugués ψ de la hessienne et comme réseau de coniques apolaires les coniques inscrites dans le QC. La hessienne de cette stelloïde cubique est la courbe circulaire focale de Van Rees.

Le troisième est centré sur la transformation ψ de Moebius, qui peut être définie de 3 manières : à partir d'un triangle, d'un QC ou de sa SC conjuguée (le triangle est alors un des triangles de pivots de la SC).

Cette transformation associe une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle centré sur l'axe de symétrie. Dans le triangle, les 2 points fixes de la transformation sont les 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle et la transformation échange les points isodynamiques, les points de Fermat et le cercle de Parry et l'axe de Brocard. Dans le QC, ce sont les points F1 et F2 du 1^{er} axe de Steiner et la transformation échange les couples de sommets opposés, les points S et S' et le cercle de Miquel et la droite de Steiner. Pour la SC conjuguée du QC, la transformation associe à tout point du plan le centre de l'hyperbole équilatère conique polaire du point par rapport à la SC ; elle laisse la hessienne de Van Rees globalement invariante, les 2 foyers des coniques inscrites étant conjugués ψ .

Enfin, le quatrième et dernier traite des 2 figures duales formées par un QA de 4 points et un QC de 4 droites ayant le même triangle diagonal et de leurs isocubiques.

Il apparaît que la cubique circulaire focale de Van Rees du QC est un cas particulier de l'isocubique circulaire d'un QA dont 2 côtés opposés sont perpendiculaires. L'article montre la nécessité de considérer les 2 figures duales du QA et du QC pour définir une dualité point/droite par pôle/polaire quadrilinéaire ; ainsi, le triangle des S-points est autodual, comme le triangle diagonal, chaque côté étant le dual du sommet opposé.

L'article débouche sur une généralisation inattendue du théorème de Kantor-Hervey et une construction des épi- et hypocycloïdes inscrites dans le QC ayant un nombre de points de rebroussement fini.

A) Trois figures

1. Triangle

Le triangle est la figure duale par excellence, chaque côté étant le dual du sommet opposé ; on définit aisément la dualité point/droite dans le triangle par pôle/polaire réciproques et la transformation ψ dont les points fixes sont les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner, tangente aux 3 côtés en leurs milieux.

Le site Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC de Clark Kimberling décrit les points, droites et éléments remarquables du triangle ; de 400 points à l'origine, il est parvenu aujourd'hui à près de 10000 points, dont il donne systématiquement les coordonnées barycentriques et trilineaires ...

On s'intéressera au centre de gravité G_1 , au centre du cercle circonscrit O_3 , à l'orthocentre H_4 et aux points isodynamiques S_{15} et S'_{16} , points d'intersection des 3 cercles d'Apollonius du triangle (cercles ayant pour diamètres les segments joignant les 2 points d'intersection des bissectrices issues de chaque sommet avec le côté opposé). La droite d'Euler passe par G_1 , O_3 et H_4 , l'axe de Brocard par S_{15} et S'_{16} et l'axe de Lemoine est la médiatrice de $S_{15}S'_{16}$; enfin, le cercle de Parry passe par G_1 , S_{15} et S'_{16} .

2. Quadrangle complet

Le quadrangle complet est la figure formée par 4 points ou sommets et 6 côtés, les intersections de 2 côtés opposés étant les sommets du triangle diagonal DT ; on définit la transformation ϕ associant à un point quelconque du plan le point de concours de ses polaires par rapport à toutes les coniques diagonales circonscrites aux 4 sommets du QA et les isocubiques invariantes dans cette transformation ϕ , pivotales si les droites passant par 2 points conjugués ϕ de la cubique passent par un point fixe appelé pivot.

Le site Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF décrit les principaux points, droites et éléments du QA ; les points les plus connus sont le barycentre des 4 points, les point Euler-Poncelet et Gergonne-Steiner et les centres isogonal, pivot de l'isocubique circulaire, et isotomique, situé sur la droite joignant le barycentre au centre de gravité de DT .

3. Quadrilatère complet

Cette figure duale de la précédente est formée par 4 droites et leurs 6 points d'intersection ou sommets, les droites joignant 2 sommets opposés étant les côtés du triangle diagonal ; on définit les transformations ψ , associant à un point le point résultant de la combinaison d'une symétrie axiale et une inversion, et τ , associant à une droite la droite passant par les conjugués harmoniques vis-à-vis des couples de sommets opposés des intersections avec les diagonales.

Le site Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF décrit aussi les principaux points, droites et éléments du QC ; les éléments connus sont les points de Miquel, de Morley et de Kantor-Hervey, les cercles de Miquel et de Hervey, les droites de Newton et de Steiner, les coniques inscrites, dont une parabole, l'isocubique circulaire focale de Van Rees, la stelloïde cubique conjuguée du QC et les épicycloïdes et hypocycloïdes inscrites.

Les 2 figures du QA et du QC sont duales si elles ont le même triangle diagonal ; chaque sommet du QA a pour dual une droite du QC et chaque sommet du QC a pour dual une droite du QA ; on peut alors définir la dualité quadrilatérale par pôle/polaire réciproques en utilisant la dualité trilatérale par rapport à DT et les transformations ϕ du QA et τ du QC.

Le QC diagonal est formé par les 3 diagonales du QC et la droite de Newton ; il possède évidemment les mêmes points, droites, propriétés et courbes que le QC.

B) Trois transformations et dualité pôle/polaire trilinéaire et quadrilinéaire

1. Transformation ϕ du QA ou isoconjugaison

Cette transformation ϕ associe à un point le point de concours de ses polaires par rapport à toutes les coniques diagonales (circonscrites aux sommets du QA).

Le conjugué ϕ du centre de gravité du triangle diagonal $G\delta$ est le point $P\delta$.

Une droite quelconque a pour transformée ϕ une conique circonscrite aux sommets du triangle diagonal (les points d'intersection de la droite et de la conique sont conjugués ϕ). Ainsi, la conique des 9 points du QA est la transformée ϕ de la droite de l'infini.

Les transformations isogonale et isotomique sont 2 cas particuliers d'isoconjugaison.

2. Transformation ψ du triangle, du QC et de la stelloïde conjuguée

Cette transformation ψ de Moebius associe une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle de centre M et de diamètre F_1F_2 , F_1 et F_2 étant les 2 points invariants de la transformation ; dans le triangle, ces 2 points sont les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner centrée au centre de gravité et tangente aux 3 côtés en leurs milieux, dans le QC, ce sont les points F_1 et F_2 du 1^{er} axe de Steiner. La transformation ψ associe à tout point le centre de l'hyperbole équilatère conique polaire du point par rapport à la stelloïde cubique conjuguée du QC et laisse la hessienne de cette courbe ou isocubique circulaire focale de Van Rees globalement invariante, les 2 foyers des coniques inscrites dans le QC étant conjugués ψ .

3. Transformation τ du QC

Cette transformation τ du QC associe à toute droite la droite passant par les conjugués harmoniques de ses points d'intersection avec les diagonales par rapport aux couples de sommets opposés du QC. Pour tout point de la hessienne, l'hyperbole équilatère conique polaire centrée au conjugué ψ du point dégénère en 2 droites perpendiculaires conjuguées τ .

4. Dualité pôle/polaire trilinéaire dans le triangle

Cette transformation associe à un point (pôle) la droite (polaire) passant par les conjugués harmoniques des sommets de son triangle cévien (intersections des droites par le point et un sommet avec le côté opposé) par rapport aux 3 couples de sommets.

Toute conique circonscrite au triangle a pour duale une conique inscrite.

5. Dualité pôle/polaire quadrilinéaire dans le QA/QC de même DT

Cette transformation associe à un point (pôle) la droite (polaire) conjuguée τ par rapport au QC de sa polaire trilinéaire par rapport à DT ou la polaire trilinéaire par rapport à DT de son conjugué ϕ par rapport au QA.

Les duales des 4 sommets du QA sont les 4 droites du QC.

Toute conique diagonale circonscrite aux sommets du QA, centrée sur sa conique des 9 points, a pour duale une conique inscrite dans le QC, centrée sur sa droite de Newton et de foyers 2 points conjugués ψ de l'isocubique circulaire focale du QC.

Toute conique circonscrite à DT a pour duale une conique inscrite dans ce triangle, qui est donc autodual ; cette propriété est aussi vraie pour le triangle des S-points.

Ainsi, la conique duale de la conique diagonale passant par le point $P\delta$ est la parabole inscrite dans le QC et la conique duale de la conique circonscrite à DT passant par les points $G\delta$ et $P\delta$ est la parabole inscrite du QC diagonal. Ces 2 coniques diagonale et circonscrite sont circonscrites au triangle des S-points et leurs 2 paraboles duales sont inscrites dans ce triangle.

C) Trois familles de courbes

A) Isocubiques pivotales circulaires du QA et du QC

Les isocubiques du QA sont les cubiques invariantes dans la transformation ϕ ; les isocubiques pivotales sont telles que les droites joignant 2 points conjugués ϕ de la cubique passent par un point fixe, appelé pivot ; le pivot est le tangential des 4 sommets du QA, son propre conjugué ϕ l'isopivot étant lui-même le tangential des 3 sommets de DT et du pivot.

L'isocubique pivotale circulaire du QA a pour pivot le point isogonal ; elle passe par les sommets du triangle de Miquel, centres des 3 transformations ψ qui échangent les 2 autres sommets et 2 couples de sommets du QA. Le pivot est le conjugué isogonal du point de Gergonne-Steiner par rapport au triangle de Miquel et la courbe est globalement invariante dans la transformation isogonale par rapport à ce triangle.

L'isocubique pivotale circulaire focale de Van Rees du QC est un cas particulier de l'isocubique pivotale circulaire d'un QA dont 2 côtés opposés sont perpendiculaires ; monocursale ou bicursale, cette courbe est le lieu des foyers des coniques inscrites du QC.

Ces 2 courbes sont invariantes dans une infinité de transformations ϕ et dans 3 transformations ψ ; elles sont aussi anallagmatiques, çad invariantes dans plusieurs inversions.

B) Stelloïdes

La stelloïde de rang n est définie à partir d'un n -angle de n points fixes A_i appelés pivots et d'une direction fixe comme le lieu des points M tels que la somme des directions des droites MA_i par rapport à une droite fixe de référence ait cette direction fixe.

Cette courbe est la généralisation pour n points de l'hyperbole équilatère ; pour tout couple de points A_1 et A_2 symétriques par rapport au centre, la bissectrice de l'angle A_1MA_2 est fixe.

Chaque courbe de rang n admet comme courbe polaire d'un point P (lieu des points de contact des tangentes issues de ce point à la courbe) une stelloïde de rang $n-1$. Chaque courbe de rang n admet une infinité de n -angles de pivots, mais une seule direction fixe ; chaque n -angle de pivots détermine un faisceau de stelloïdes de directions variables.

Ainsi, la stelloïde cubique admet comme conique polaire d'un point P une hyperbole équilatère centrée au point conjugué ψ de P ; elle admet une infinité de triangles de pivots ayant tous les mêmes foyers de leur ellipse inscrite de Steiner et même centre de gravité.

C) Epi- et hypocycloïdes

Les épi- ou hypocycloïdes sont généralement définies de 2 manières :

- comme lieu d'un point fixe d'un cercle roulant sans glisser sur un autre cercle (épicycloïde) ou à l'intérieur (hypocycloïde)
- comme enveloppe des droites passant par 2 points M et N décrivant un même cercle fixe à des vitesses différentes dans le même sens (épi) ou en sens inverse (hypo)

Les plus connues sont les épicycloïdes à 1, 2 ou 4 points de rebroussement ou respectivement cardioïde, néphroïde ou astroïde et l'hypocycloïde à 3 points de rebroussement ou deltoïde.

Il convient de noter que Frank Morley a généralisé cette notion en considérant

- d'un côté le cercle circonscrit à 3 sommets d'un triangle, la cardioïde enveloppe des 4 cercles circonscrits des triangles de référence du QC et l'ennacardioïde enveloppe des 5 cardioïdes des 5 QC formés par 5 droites prises 4 à 4 ...
- de l'autre les 4 cercles inscrit et exinscrits dans le triangle, les 27 cardioïdes inscrites dans le QC et les 64 ennacardioïdes inscrites dans le 5-droites ...

Mais l'ennacardioïde et les courbes suivantes ne sont pas de vraies épicycloïdes.

D) Trois théorèmes

1. Kantor-Hervey (épi- et hypocycloïdes inscrites dans un QC)

Le théorème de Kantor-Hervey stipule que les médiatrices des segments joignant le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre des 4 triangles de référence d'un QC concourent en un point H, centre du cercle de Hervey ; ce cercle, symétrique du cercle de Miquel par rapport au point N, barycentre des centres des cercles circonscrits, est le cercle intérieur de l'hypocycloïde à 3 rebroussements ou deltoïde inscrite dans le QC.

Ce théorème est un cas particulier d'une propriété beaucoup plus générale liée aux épi- et hypocycloïdes inscrites dans le QC, définies comme enveloppes de droites passant par 2 points M et N décrivant un cercle à des vitesses m et n, entiers relatifs premiers entre eux.

- Il y a $(m+n)^3$ épi- ou hypocycloïdes tangentes aux 4 droites du QC
- Leurs centres sont à l'intersection des maillages de $(m+n)^2$ droites par triangle de référence du QC, $(m+n)$ centres par droite et chaque centre sur 4 droites
- Ces droites sont les médiatrices de couples de points isogonaux d'où l'on voit les 3 côtés du triangle sous des angles proportionnels aux côtés opposés dans un facteur $m/(m+n)$ et $n/(m+n)$; il y a $(m+n)^2$ points de ce type
- Ces points r du triangle s'obtiennent par chaînes en alternant inversion et isogonalité à partir d'un couple de départ ; $\text{isog}(P_r) = P_{1-r}$ et $\text{inverse}(P_r) = P_{2+r}$
- Pour $m+n=1$, il n'y a que 4 droites et on retrouve le théorème de Kantor-Hervey généralisé (deltoïde pour $m=2$ et $n=-1$ et autres H_{2n+1})
- Pour $m+n=2$, il y a 4 points, les premiers étant les centres des cercles inscrit et exinscrits et les suivants donnant 8 astroïdes pour $m=3$ et $n=-1$
- Pour $m+n=3$, il y a 9 points et les premiers donnent 27 cardioïdes pour $m=2$ et $n=1$; on retrouve le théorème de Morley et la stelloïde cubique ...

2. Morley (cardioïdes inscrites dans un triangle et trisectrices des angles)

Le théorème de Morley indique que le maillage des centres des cardioïdes inscrites dans un triangle est constitué de 3 groupes de 3 droites parallèles se coupant selon des angles de $\pi/3$. La direction des 3 groupes de droites est la direction moyenne des 3 côtés et leurs intersections obtenues en traçant les trisectrices de chacun des 3 angles forment des triangles équilatéraux. Les 27 centres des cardioïdes inscrites dans le QC sont les intersections des maillages de Morley des 4 triangles de référence ; chaque point est à l'intersection de 4 droites (1 par maillage) et chacune des $4 \times 9 = 36$ droites porte 3 points.

3. Urquhart (3 QA d'un QC tangentiel)

Le théorème de Urquhart est qualifié de théorème le plus élémentaire de la géométrie euclidienne, dans la mesure où il ne fait intervenir que des droites et des distances.

On donne 4 droites formant un QC tangentiel ou extangentiel, çàd que les coniques inscrites comprennent un cercle inscrit ou exinscrit, dont le centre est un foyer double ; la courbe de Van Rees est une strophoïde, cas limite entre les formes monocursale et bicursale.

On peut alors écrire indifféremment, pour chacun des 3 QA du QC, 2 égalités de type :

$AB + A'B' = AB' + A'B$ ou $AB - A'B = AB' - A'B'$; on note que la formulation classique du théorème fait apparaître les égalités pour 2 des 3 QA, mais omet celle du 3^{ème}.

Cerise sur le gâteau, si le point A' est le point D, ETC X175 ou X176, du triangle ACC', on a $DA + DC - AC = DA + DC' - AC' = DC + DC' - CC'$ ou $DC' + AB = DC + AC' = DA + CC'$. Il y a dès lors 3 manières de trouver un cercle inscrit dans les 3 QC du QA ADCC'.

Le puzzle

On a trouvé, dans les 4 articles et dans ce bref résumé, de multiples rapprochements entre les différentes pièces de ce joli puzzle géométrique :

- le triangle est une figure autoduale, les côtés étant les droites duales des sommets
- le QA et le QC sont 2 figures duales de même triangle diagonal DT
- le triangle diagonal DT et le triangle des S-points sont 2 figures autoduales du QA/QC
- le QA détermine une transformation ϕ qui conduit à une infinité d'isocubiques pivotales ; une seule est circulaire, le pivot étant le point isogonal
- le QC détermine une transformation ψ principale et 1 transformation τ
- la transformation ψ peut être définie dans un triangle, son centre est le centre de gravité et les 2 points fixes sont les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner
- le QA détermine 3 QC et 3 transformations ψ , de centres les sommets du triangle de Miquel ; ce triangle est en perspective de centre le point de Gergonne-Steiner avec DT
- le QC détermine 3 QA formés par 2 couples de sommets et 3 transformations ϕ ; le triangle des points de Gergonne-Steiner est en perspective de centre le point de Miquel avec DT et il est inscrit dans le cercle Dimidium circonscrit au triangle des S-points
- la dualité est dans le triangle la transformation pôle/polaire trilinéaire et dans la figure QA/QC la transformation pôle/polaire quadrilinéaire, qui met en jeu la dualité trilinéaire par rapport au triangle diagonal et les transformations ϕ du QA et τ du QC
- les sommets du mystérieux triangle des S-points sont à l'intersection d'une conique diagonale d'une conique circonscrite ; les duales de ces 2 coniques sont les paraboles inscrites du QC et du QC diagonal, toutes 2 inscrites dans le triangle des S-points
- l'isocubique pivotale circulaire du QA est la courbe invariante dans la transformation ϕ dont le pivot est le point isogonal ; ce point est le conjugué isogonal du point de Gergonne-Steiner par rapport au triangle de Miquel
- l'isocubique pivotale circulaire focale de Van Rees est un cas particulier de la précédente pour un QA dont 2 côtés opposés sont perpendiculaires ; elle admet une infinité de QC inscrits ayant le même point de Miquel et la même droite de Newton et une infinité de QA inscrits à côtés opposés perpendiculaires
- cette courbe de Van Rees est la hessienne de la stelloïde cubique conjuguée du QC ; cette courbe est le lieu des points tels que la somme des directions des droites joignant le point à 3 points fixes appelés pivots reste constante, les triangles de pivots ayant tous les mêmes foyers de l'ellipse inscrite de Steiner et la même transformation ψ
- il existe un nombre fini d'épicycloïdes et d'hypocycloïdes inscrites dans le QC ayant un nombre fini de points de rebroussement ; elles enveloppent les droites MN, M et N décrivant un même cercle fixe à des vitesses m et n, entiers relatifs premiers entre eux
- le théorème de Kantor-Hervey se laisse alors généraliser ; les centres des cercles fixes des épi- ou hypocycloïdes précédentes sont à l'intersection des maillages d'un nombre fini de droites pour chacun des 4 triangles de référence du QC
- le théorème de Morley correspond aux centres des cardioïdes inscrites dans le triangle ; le lieu des centres des cardioïdes inscrites dans le QC à l'intersection des maillages de Morley des 4 triangles de référence est la SC conjuguée du QC
- enfin, le théorème d'Urquhart et ses prolongations mettent en jeu un QC tangentiel et ses 3 QA ou un triangle et un point ETC formant un QA dont les 3 QC sont tangentiels

Bibliographie

On indique ici les références indispensables à la compréhension des objets abordés (Triangle, QA et QC, isocubiques et transformation φ et ψ , SC, épi- et hypocycloïde).

Triangle

- (1) T. Lalesco La géométrie du triangle Vuibert 1952
- (2) John H. Conway-Steve Sigur The Triangle Book A. K. Peters 2013

Quadrangle Complet

- (3) Geometrikon Complete Quadrangle and Duality
- (4) Benedetto Scimemi Central Points of the Complete Quadrangle Milan 2007

Quadrilatère complet

- (5) J. Steiner Théorème sur le Quadrilatère Complet Annales de Gergonne 1827
- (6) J.W. Clawson The Complete Quadrilateral 1919
- (7) Jean-Pierre Ehrmann Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral 2004

Isocubiques et transformation φ

- (8) Jean-Pierre Ehrmann-Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane 2015

Transformation ψ

- (9) Bernard Gibert Orthocorrespondance and Orthopivotal Cubics Forum Geometricorum 2003
- (10) Benedetto Scimemi Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle Forum Geometricorum 2010

Stelloïde cubique

- (11) Jules Marchand Géométrie du quadrilatère complet Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles 1937

Epicycloïdes et hypocycloïdes

- (12) J. Lemaire 1913 et 1918 Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (repris et développé dans l'ouvrage réédité en 1967 Hypocycloïdes et épicycloïdes Blanchard)
- (13) Général Marmion 1956 Epi- ou hypocycloïdes semblables tangentes à 2, 3 ou 4 droites Mathesis

Sites Internet

- <http://bernardkeizer.blogspot.fr> , articles de Bernard Keizer
- <http://retro.seals.ch/stelloïde> cubique, article de Jules Marchand
- www.faculty.evansville.edu , Encyclopedia of Triangle Centers - ETC, site de Clark Kimberling consacré aux points remarquables du triangle
- www.chrisvantienhoven.nl , Encyclopedia of Quadri-Figures, site de Chris van Tienhoven consacré aux éléments remarquables des quadrangles et quadrilatères
- www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr , site de Bernard Gibert consacré aux cubiques et autres courbes liées
- www.eckartschmidt.de, articles de Eckart Schmidt

Vanitas vanitatum, dixit Ecclesiastes : vanitas vanitatum et omnia vanitas (*)

Vanité des vanités, a dit l'Ecclésiaste : vanité des vanités et tout est vanité.

(*) Oraison funèbre de Henriette Anne d'Angleterre, Duchesse d'Orléans

Jacques-Bénigne Bossuet