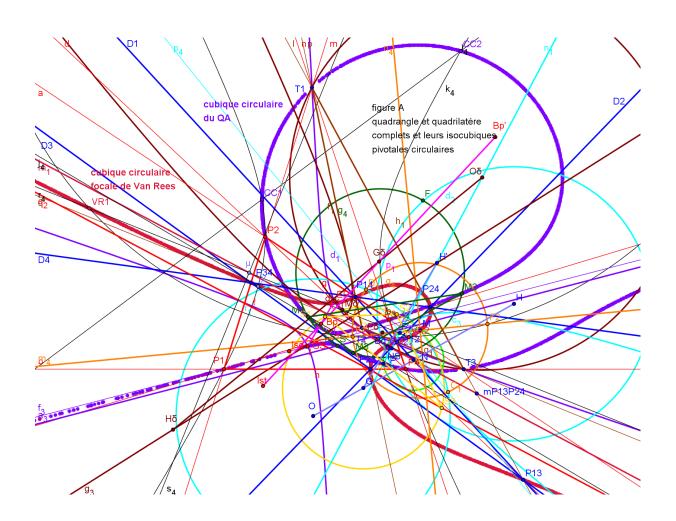
Bernard Keizer (bernard.keizer@wanadoo.fr)

Le Quadrangle et le Quadrilatère Complets comme figures duales et leurs isocubiques



Résumé

Ce 4ème et dernier article (*) présente les propriétés du quadrangle complet de 4 points et du quadrilatère complet de 4 droites et de leurs isocubiques. La cubique circulaire focale de Van Rees apparaît comme un cas particulier de la cubique circulaire d'un quadrangle ayant 2 côtés opposés perpendiculaires. Le rapprochement des 2 figures duales du quadrangle et du quadrilatère complets ayant le même triangle diagonal permet un élargissement de la dualité sommets/côtés du triangle à sommets du QA/droites du QC. Il s'ensuit la construction des QA/QC diagonaux et un retour sur les S-points. Enfin, la recherche systématique de nouveaux points du QA/QC débouche sur une généralisation inattendue du théorème de Kantor-Hervey. L'article utilise les notations de Encyclopedia of Triangle Centers de Clark Kimberling et Encyclopedia of Quadrifigures de Chris van Tienhoven (**). Il doit beaucoup aux travaux de Bernard Gibert sur les cubiques (***).

Abstract

This 4th and last article (*) pops up the properties of the complete quadrangle of 4 points and of the complete quadrilateral of 4 lines and of their isocubics. The circular focal isocubic of Van Rees appears as a particular case of the circular isocubic of a quadrangle with 2 perpendicular opposite sides. The rapproachment of the dual figures of the complete quadrangle and quadrilateral with the same diagonal triangle makes possible an enlargement of the duality of the vertices/sides of the triangle to the vertices of the QA/lines of the QL. It follows the construction of the diagonal QA/QL and a return to the S-points. Last, the systematic research of new points of the QA/QL brings an unexpected generalization of the Kantor-Hervey theorem. The article uses the notations of Encyclopedia of Triangle Centers by Clark Kimberling and Encyclopedia of Quadrifigures by Chris van Tienhoven (**). It ows much to the works of Bernard Gibert on the cubics (***).

Zusammenfassung

Dieser 4te und letzte Artikel (*) stellt die Eigenschaften des vollständigen Vierecks und des vollständigen Vierseits sowie deren Isokubiken dar. Die zirkulare fokale Van Rees Kubik erscheint als ein Sonderfall der zirkularen Kubik eines Vierecks mit 2 perpendikularen gegenüberliegenden Seiten. Die Zusammenstellung der dualen Figuren der vollständigen Vierecks und Vierseits mit demselben diagonal Dreieck ermöglicht eine Verbreitung der Dualität von Ecken/Seiten des Dreiecks zu Ecken des VE/ Seiten des VS. Es folgt die Konstruktion des diagonalen VE/VS sowie eine Rückkehr zu den S-Punkten. Zuletzt, eine systematische Suche neuer Punkte des VE/VS bringt eine unerwartete Generalisierung des Kantor-Hervey Theorems. Der Artikel benutzt die Notierungen von Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers und von Chris van Tienhoven's Encyclopedia of Quadrifigures (**). Er schuldet viel den Werken von Bernard Gibert über den Kubiken (***).

(*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014
Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation ψ 2015

http://bernardkeizer.blogspot.fr

(**) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC <u>www.faculty.evansville.edu</u>, Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF <u>www.chrisvantienhoven.nl</u> (***) Bernard Gibert <u>www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr</u>

Sommaire

Introduction

Première partie : le quadrangle complet, l'isoconjugaison et les isocubiques

- A) Quadrangle complet
 - 1. Quadrangle complet de 4 points et triangle diagonal
 - 2. Triangle de Miquel et transformations ψ
- B) Isoconjugaison φ
 - 1. Coniques diagonales et points conjugués
 - 2. Coniques circonscrites et droites conjuguées
- C) Isocubiques pivotales
 - 1. Pivot P quelconque et isopivot P'
 - 2. Système Desmic ou configuration de Reye
 - 3. Pivot Isg et isopivot Isg': cubique pivotale circulaire
- D) Isocubiques non-pivotales circulaires : quasi-isogonale / DT et isogonale / Miquel

Récapitulatif des transformations rencontrées

Seconde partie : le quadrilatère complet, la transformation y et la cubique de Van Rees

- A) Quadrilatère complet
 - 1. Propriétés du quadrilatère complet
 - 2. Points, droites et cercles du quadrilatère complet
- B) Transformation ψ du quadrilatère complet
- C) Cubique circulaire focale de Van Rees
 - 1. Cubique de Van Rees unicursale
 - 2. Triangles MSS' et MVV'

Troisième partie : la dualité dans le quadrangle/quadrilatère

- A) Dualité
 - 1. Quadrangle et quadrilatères duaux
 - 2. Dualité point/droite
 - 3. Dualité conique/conique
- B) Applications
 - 1. Intersection des droites du quadrangle et du quadrilatère
 - 2. Construction du quadrangle/quadrilatère diagonal
 - 3. Retour sur les S-points

Annexe : génération de points et généralisation du théorème de Kantor-Hervey

Résumé

Bibliographie

Figures

- Figure A QA/QC et leurs isocubiques
- Figure B QA et 3 QC et leurs isocubiques
- Figure C QC et 3 QA et leurs isocubiques
- Figure D S-points du QA/QC et du DQA/DQC
- Figure 1 Quadrangle complet de 4 points et triangle diagonal
- Figure 2 Triangle de Miquel et transformations ψ
- Figure 3 Isoconjugaison φ : coniques diagonales et points conjugués
- Figure 4 Isoconjugaison φ : coniques circonscrites et droites conjuguées
- Figure 5 Isocubiques pivotales : pivot P quelconque et isopivot P'
- Figure 6 Système Desmic ou configuration de Reye
- Figure 7 Isocubique pivotale circulaire : pivot Isg et isopivot Isg'
- Figure 8 Isocubiques non-pivotales circulaires
- Figure 9 Propriétés du quadrilatère complet
- Figure 10 Points, droites et cercles du quadrilatère complet
- Figure 11 Transformation ψ dans le quadrilatère complet
- Figure 12 Cubique circulaire focale de Van Rees unicursale
- Figure 13 Triangles MSS' et MVV'
- Figure 14 Quadrangle et quadrilatère duaux
- Figure 15 Dualité point/droite
- Figure 16 Dualité conique/conique
- Figure 17 Intersection des droites du quadrangle/quadrilatère
- Figure 18 Construction du quadrangle/quadrilatère diagonal
- Figure 19 Retour sur les S-points
- Figure 20 Généralisation du théorème de Kantor-Hervey

Ces figures ont été réalisées avec Géogébra version 5.0

Introduction

- Je pensais bien avoir fait le tour de la question avec les 3 articles consacrés au quadrilatère complet, à la stelloïde cubique et à la transformation ψ et je commençais à songer à écrire une brève synthèse de l'ensemble pour expliquer la démarche suivie.
- J'ai bien sûr continué ma participation au groupe de travail Quadriforum créé par Chris van Tienhoven, en particulier mes échanges fructueux avec Eckart Schmidt.
- Il me restait cependant quelques insatisfactions concernant plusieurs points précis comme les propriétés différentes de la courbe de Van Rees dans le cas unicursal et dans le cas bicursal ou les mystères du triangle des S-points du cercle Dimidium et sa douzaine de coniques circonscrites.
- Il me fallait, pour en sortir, comprendre qu'une bonne partie de ces problèmes était liée à une connaissance insuffisante de ma part des propriétés du quadrangle complet et de ses isocubiques pivotales. Du coup, je me suis plongé dans l'œuvre magistale de Bernard Gibert (*) et j'y ai trouvé des réponses à certaines de mes questions.
- Ce dernier article s'articule dès lors en trois parties.
- La première décrit d'abord sommairement les propriétés du quadrangle complet, des isoconjugaisons φ et des isocubiques.
- La seconde reprend celles du quadrilatère complet, de la transformation ψ et de la cubique circulaire focale de Van Rees. La courbe de Van Rees apparaît comme un cas particulier de cubique circulaire d'un quadrangle complet dont deux côtés opposés sont perpendiculaires.
- La troisième rapproche les figures duales du quadrangle et du quadrilatère complets ayant le même triangle diagonal et donne une définition de la dualité point/droite avec quelques exemples de coniques duales sur cette figure d'ensemble. Elle se poursuit avec quelques exemples d'applications, intersection des côtés du quadrangle et du quadrilatère complets, construction des quadrangle et quadrilatère complets diagonaux et retour sur les fameux S-points.
- Une annexe donne des pistes de recherche systématique de nouveaux points de la figure d'ensemble quadrangle/quadrilatère complets et débouche sur une généralisation inattendue du théorème de Kantor-Hervey en utilisant les points de Hofstadter Hr pour r entier.
 - (*) Jean-Pierre Ehrmann-Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane 2015

Légende des figures A, B, C et D

Figure A page 1 : figure QA/QC duaux et DT

Principaux points, droites et coniques du QA et du QC Isocubiques pivotales circulaires du QA et du QC L'isocubique pivotale du QA passe par les 4 sommets du QA, par les sommets du triangle diagonal et du triangle de Miquel, les centres des cercles inscrit et exinscrits de ce triangle et le pivot Isg La cubique circulaire focale de Van Rees passe par les 6 sommets du QC Et par le point de Miquel M

Figure B page 7: figure QA et ses 3 QC

Principaux points, droites et coniques du QA Isocubiques pivotales circulaires du QA et de ses 3 QC Chaque isocubique circulaire focale de Van Rees d'un des 3 QC passe par les 4 sommets du QA, par 2 sommets de DT et 1 sommet du triangle de Miquel; les 3 droites de Newton passent par 2 milieux de côtés opposés du QA et par le milieu d'un côté de DT et se coupent au point Bp

Figure C page 17: figure QC et ses 3 QA

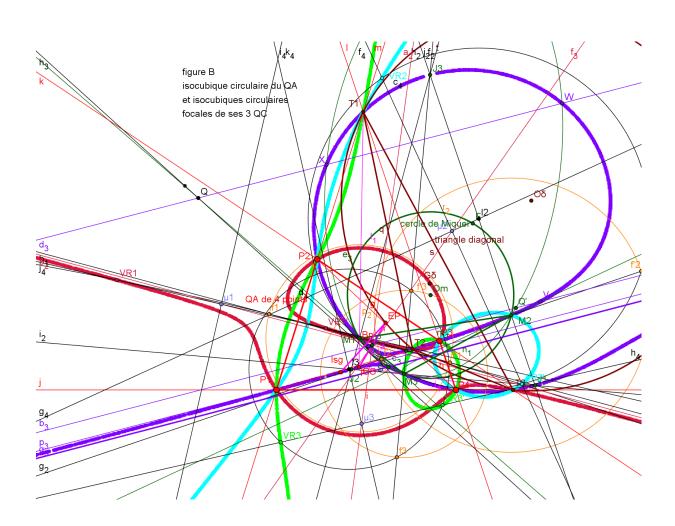
Principaux points, droites et cercles du QC Isocubiques pivotales circulaires du QC et de ses 3 QA Chaque isocubique circulaire d'un des 3 QA passe par les 6 sommets du QC, 4 étant les sommets du QA et les 2 autres 2 des 3 sommets de son DT, et par son pivot Isg; les 4 cubiques se coupent au point de Miquel du QC

Figure D page 23 : S-points du QA/QC et du DQA/DQC

La conique circonscrite au triangle diagonal passant par G δ et P δ porte les S-points des 2 figures QA/QC et DQA/DQC à l'intersection avec les coniques diagonales passant par les points Pi et leur barycentre Bp et les points P δ et Dpi et leur barycentre DBp. Les S-points du DQA/DQC sont sur une conique circonscrite à DDT passant par les points DG δ et DP δ .

Première partie

Le Quadrangle Complet, l'isoconjugaison et les isocubiques



A) Le quadrangle complet

1. Quadrangle complet de 4 points et triangle diagonal (figure 1)

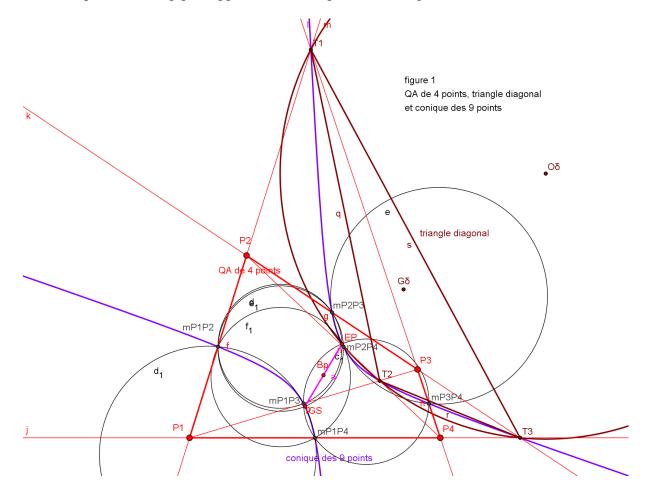
Un quadrangle complet est la figure formée par 4 points non ordonnés Pi, i = 1 à 4 ; il a 4 sommets et 6 côtés joignant les sommets 2 à 2. L'isobarycentre Bp des sommets est le point QA-P1 de EQF.

Les 4 cercles d'Euler des 4 triangles formés par 3 des 4 sommets sont concourants au point d'Euler-Poncelet EP du QA; c'est le point QA-P2 du QA.

Les 4 cercles passant par les 3 milieux des 3 côtés issus d'un même sommet sont concourants au point de Gergonne-Steiner du QA ; c'est le point QA-P3 de EQF.

Les points EP et GS sont symétriques par rapport au point Bp.

Il y a 3 manières de ranger les sommets du QA en 2 paires de points sur 2 côtés opposés ; les intersections de ces côtés opposés sont les sommets du triangle diagonal. Le lieu des centres des coniques circonscrites aux 4 sommets du QA est la conique des 9 points, appelée QA-Co1 dans EQF ; centrée en Bp, elle passe par les 6 milieux des côtés du QA, par les 3 sommets du triangle diagonal et par les points EP et GS. Le point EP est la 4ème intersection de cette conique avec le cercle circonscrit au triangle diagonal. Le triangle diagonal est le triangle cévien de chaque sommet par rapport au triangle formé par les 3 autres, qui est son triangle anticévien par rapport au triangle diagonal. Le centre de gravité du triangle diagonal est Gδ ou QA-P10 de EQF, le centre du cercle circonscrit est Oδ ou QA-P11 et l'orthocentre Hδ ou QA-P12. Enfin, le symétrique du complément de Bp par rapport à Gδ est le point isotomique Ist ou QA-P5 de EQF.



2. Triangle de Miquel et transformations ψ (figure 2)

Les 4 sommets Pi du QA déterminent 4 QC, les 4 points formant 4 sommets 2 à 2 conjugués d'un QC et les 2 autres sommets étant 2 des 3 sommets du triangle diagonal. Chacun de ces 3 QC a un point de Miquel, un cercle de Miquel, une transformation ψ et une cubique circulaire focale de Van Rees (tous ces éléments, développés dans les 3 1ers articles, sont résumés brièvement dans la 2^{nde} partie du présent article).

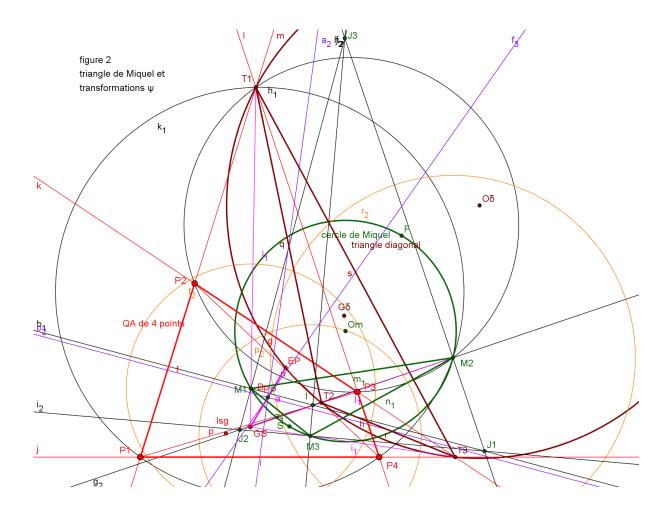
Les points de Miquel des 3 QC forment les sommets du triangle de Miquel du QA; on appelle I et J1, J2 et J3 les centres des cercles inscrit et exinscrits de ce triangle.

Chaque sommet de ce triangle est le centre d'une transformation ψ qui échange les 2 autres sommets du triangle, les sommets du QA de chaque paire, les 2 sommets de DT du même QC et enfin le point I et l'un des 3 points J ainsi que les 2 autres points J.

Les 3 cercles de Miquel ont un point commun F situé sur le cercle circonscrit au triangle de Miquel ; c'est le point QA-P9 de EQF.

Le triangle de Miquel et le triangle diagonal sont en perspective de centre le point GS. Le point isogonal de GS par rapport au triangle de Miquel est le point isogonal Isg; c'est le point QA-P4 de EQF. Ce point est aussi l'inverse de l'isogonal de chaque sommet du QA par rapport au triangle formé par les 3 autres par rapport à leur cercle circonscrit. Les 3 conjugués y de chaque sommet du QA sont par construction les 3 autres sommets

Les 3 conjugués ψ de chaque sommet du QA sont par construction les 3 autres sommets et les 3 conjugués ψ du point Isg sont les 3 sommets du triangle diagonal.



B) Isoconjugaison φ

1. coniques diagonales et points conjugués (figure 3)

On appelle conique diagonale toute conique passant par les 4 sommets du QA; toute conique diagonale contient les sommets des triangles anticéviens de ses points par rapport au DT.

Le DT est autopolaire par rapport à toutes les coniques diagonales, çàd que la polaire de chaque sommet est le côté opposé.

Pour un point quelconque X, les polaires de X par rapport à toutes les coniques diagonales passent par un point X' situé sur la tangente en X à la conique diagonale passant par X et appelé isoconjugué de X.

La transformation réciproque $X \leftrightarrow X'$ définit l'isoconjugaison ϕ par rapport au triangle diagonal ; c'est la transformation QA-Tf2 de EQF. Les 4 sommets du QA sont les points fixes de cette isoconjugaison définie par un couple de points conjugués par rapport au triangle diagonal ; ils se construisent aisément.

Le pôle Pδ de cette isoconjugaison est l'isoconjugué du centre de gravité du triangle diagonal; c'est le point QA-P16 de EQF. Ce point est le centre radical des 3 cercles circonscrits aux 3 triangles diagonaux des 3 QC du QA ou des 3 QA du QC (triangles P12P34T1, P13P24T2 et P14P23T3 sur la figure 14).

Les transformations isogonale et isotomique sont 2 cas particuliers d'isoconjugaison.

On peut, sur la figure 3, identifier quelques isoconjugués :

l'isoconjugué Ist' de Ist est le point QA-P17 de EQF

l'isoconjugué Bp' est le complément de Bp par rapport à DT; c'est le point QA-P20 de EQF l'isoconjugué Isg' de Isg est le point QA-P41 de EQF

figure 3 isoconjugaison φ: coniques diagonales et points conjugués

AX

QA de 4 points

QA de 4 points

QB pg

T1

triangle diagonal

h

T2

P1

P1

P3

P4

T3

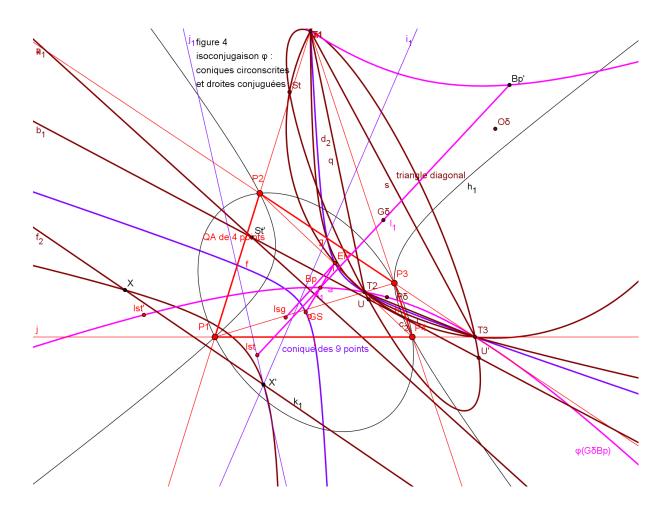
2. coniques circonscrites et droites conjuguées (figure 4)

Toute conique circonscrite au triangle diagonal est la transformée d'une droite dans l'isoconjugaison φ; cette droite coupe la conique en 2 points isoconjugués.

Réciproquement, toute conique passant par 2 points isoconjugués est la transformée dans l'isoconjugaison φ de la droite passant par ces 2 points.

On peut préciser quelques-unes de ces coniques circonscrites et leurs droites isoconjuguées :

- cercle circonscrit au triangle diagonal ; la droite isoconjuguée est la médiatrice du segment EPIsg, le milieu de ce segment étant l'isoconjugué du point diamétralement opposé à EP sur le cercle circonscrit
- ellipse circonscrite de Steiner du triangle diagonal ; la droite isoconjuguée passe par le point isoconjugué du point de Steiner du triangle diagonal
- conique des 9 points ; la droite isoconjuguée est la droite de l'infini
- conique passant par Gδ et Pδ, ainsi que par Dδ (Mδ et Dδ sont les 2 points d'intersection du cercle circonscrit au triangle diagonal et du cercle Dimidium et Pδ est sur la corde MδDδ; la droite isoconjuguée est la droite GδPδ. Comme cette conique passe par les 3 S-points (cf p.26), les isoconjugués de Dδ et des S-points sont alignés sur la droite GδPδ.
- conique passant par Bp et Bp'; ces points étant isoconjugués, la droite isoconjuguée est la droite BpBp' qui passe par Gδ, du coup, la conique passe par Pδ.



C) Isocubiques pivotales

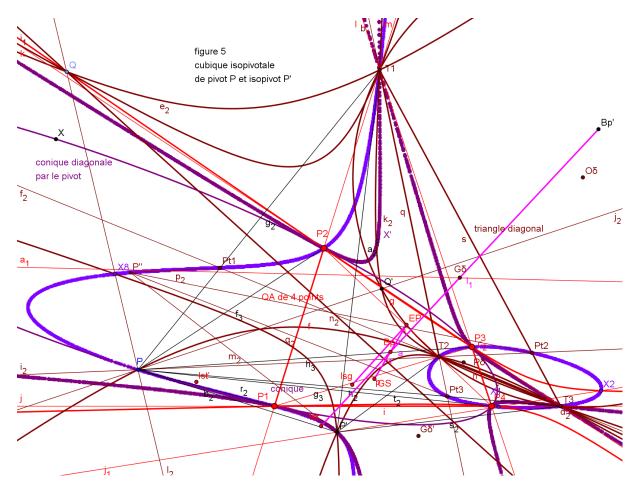
Les isocubiques sont les cubiques invariantes dans une isoconjugaison ϕ par rapport à un triangle de référence ; elles peuvent prendre 2 formes, pivotale ou non-pivotale.

1. Pivot P quelconque et isopivot P' (figure 5)

Pour les isocubiques pivotales, toute droite passant par un point P ou pivot recoupe la cubique en 2 points isoconjugués ; l'isoconjugué du pivot P est l'isopivot ou pivot secondaire P'. La cubique passe par les 4 points Pi, par les sommets du triangle diagonal, les sommets du triangle cévien du pivot par rapport au triangle diagonal, par le pivot P et l'isopivot P'. On peut donner plusieurs constructions de l'isocubique pivotale en utilisant les propriétés des coniques diagonales ou circonscrites :

- la cubique est le lieu des points de contact des tangentes issues du pivot aux coniques diagonales, la polaire du pivot passant par l'isopivot
- elle est le lieu des points de contact des tangentes issues de l'isopivot aux coniques circonscrites passant par le pivot, la polaire de l'isopivot passant par son tangentiel
- elle est le lieu des points d'intersection d'une droite passant par le pivot avec sa conique isoconjuguée, conique circonscrite passant par l'isopivot
- elle est aussi le lieu des points d'intersection d'une droite passant par l'isopivot avec sa conique isoconjuguée, conique circonscrite passant par le pivot

L'isocubique pivotale est tangente à la conique diagonale passant par le pivot en ce point. La transformée dans l'isoconjugaison φ de cette conique est une quartique tangente à la cubique en 4 points, l'isopivot et les 3 sommets du triangle diagonal, points doubles de la quartique.



2. Système Desmic ou configuration de Reye (figure 6)

Sur une cubique, 3 QA forment un système Desmic s'ils sont 2 à 2 quadruplement en perspective de centres les sommets du 3ème (projection plane d'un système de 3 tétraèdres dans l'espace). Les 12 points forment une configuration de Reye et sont sur 16 droites, 3 points par droite et 4 droites par point. Ces points sont sur 12 QC de 6 points, 6 QC par point. Le QA formé par le pivot et les sommets de DT est le 3ème QA d'un système Desmic formé par le QA et lui-même après permutation de ses points (sommets de DT = intersection de 2 côtés opposés et pivot = tangentiel des 4 sommets).

3 QA en système Desmic sur une cubique ont leurs tangentiels alignés; les tangentiels forment avec les 3 DT des QA 3 nouveaux QA eux-mêmes en système Desmic.

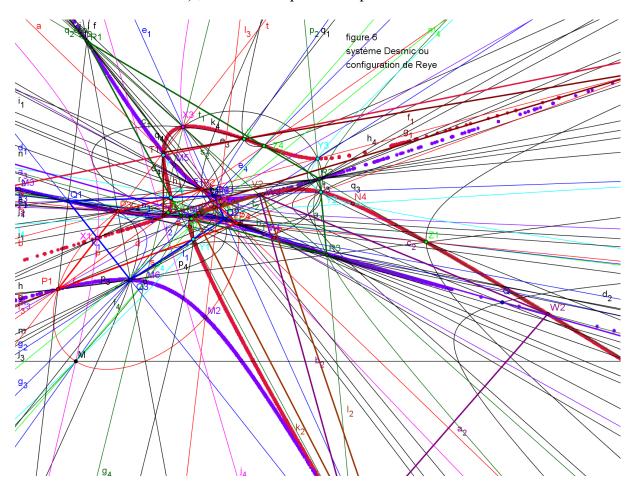
Réciproquement, 3 QA en système Desmic ou 12 points en configuration de Reye déterminent une isocubique pivotale, qui passe par les 12 sommets des 3 QA, par les 9 sommets des 3 DT et par les 3 tangentiels.

Pour construire un système de ce type, on part de 2 triangles Q1Q2Q3 et R1R2R3 en perspective de centre P1; on détermine les intersections P2 de Q1R2 et Q2R1, P3 de Q1R3 et Q3R1 et P4 de Q2R3 et Q3R2 et Q4 de P2R3, P3R2 et P4R1 et R4 de P2Q3, P3Q2 et P4Q1.

Une 1^{ère} isocubique pivotale passe par les 12 points Pi, Qi et Ri et les sommets des 3 DT.

De plus, on remarque que les côtés de ces 3 QA sont concourants (par exemple P1P2 et Q1Q2 se coupent en un point Z1 de R3R4) et les intersections déterminent une 2^{nde} configuration de Reye de 12 points Xi, Yi et Zi et une 2^{nde} isocubique pivotale.

Les sommets des 2 systèmes de QA sont 2 à 2 conjugués harmoniques entre eux, les sommets des DT des 3 QA sont les mêmes, un DT d'un des 2 systèmes ayant un sommet commun avec chacun des 3 DT de l'autre) ; les 2 isocubiques se coupent aux 9 sommets des DT.



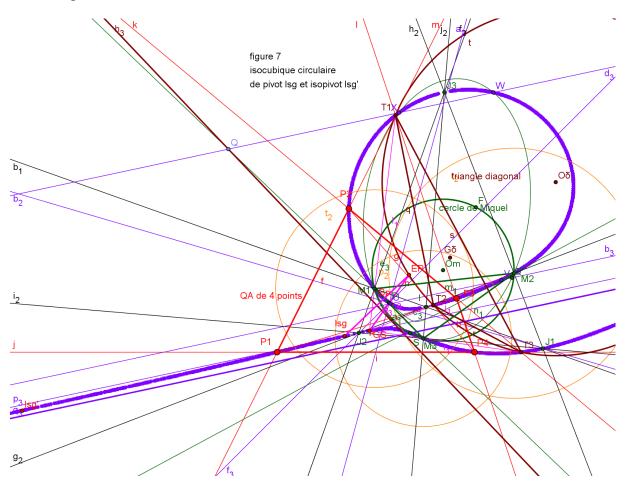
3. pivot Isg et isopivot Isg': cubique circulaire (figure 7)

Si l'on choisit comme pivot le point Isg et isopivot le point Isg', la cubique est circulaire, çàd passe par les 2 points circulaires à l'infini. Le point Isg est l'inverse par rapport au cercle circonscrit de l'isogonal d'un sommet Pi par rapport au triangle formé par les 3 autres (on note Isg = igPi par rapport à PjPkPl). Cette propriété est générale et Isg' est l'inverse par rapport au cercle circonscrit de l'isogonal de Isg par rapport au triangle diagonal.

Dans ce cas, la cubique est aussi isogonale pivotale, le pivot étant le point à l'infini de la droite GSIsg et le triangle de référence le triangle de Miquel. Ceci sigifie que toute droite parallèle à la direction GSIsg coupe la courbe en 2 points conjugués isogonaux par rapport au triangle de Miquel. En particulier, l'asymptote est parallèle à cette direction et recoupe la cubique en un point du cercle circonscrit au triangle de Miquel conjugué isogonal du point à l'infini; le point diamétralement opposé à ce point est le foyer de la cubique. Cette propriété donne une 4ème construction possible de la cubique.

Cette cubique circulaire est invariante dans une infinité de transformations ϕ (dont l'isogonalité par rapport au triangle de Miquel), dans les 3 transformations ψ de centres les sommets du triangle de Miquel qui échangent les 2 autres sommets et dans les 4 inversions de centres les centres des cercles inscrit et exinscrits de ce triangle (points fixes de la transformation isogonale).

Tout point de la cubique forme avec ses 3 transformés ψ dans les transformations mentionnées un QA de 4 points fixes d'une isoconjugaison par rapport à son triangle diagonal qui échange le pivot Isg (tangentiel des 4 points) et l'isopivot Isg' (tangentiel des sommets du DT et du pivot).



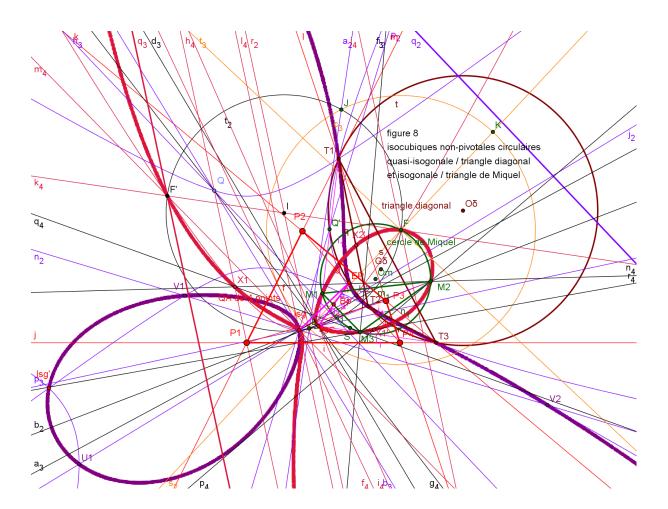
D) Isocubiques non-pivotales circulaires : quasi-isogonale / triangle diagonal et isogonale / triangle de Miquel (figure 8)

On définit la quasi-isogonalité dans le QA par analogie avec l'isogonalité dans le triangle. Pour un point P quelconque, on trace la droite par un sommet de DT et ce point et la symétrique de cette droite par rapport à la bissectrice de l'angle entre les 2 côtés du QA qui se coupent en ce sommet. Pour tout point de la cubique quasi-isogonale, les 3 droites ainsi réfléchies se coupent en un point P' de la courbe qui est donc autoquasi-isogonale.

Cette cubique est non-pivotale dans le système du QA par rapport à son DT, elle est invariante dans la transformation ϕ du QA. Elle est aussi isogonale circulaire par rapport au triangle de Miquel formé par les points EP, Isg et Isg'; elle est même circulaire focale (cf $2^{\text{ème}}$ partie). Il y a dès lors 2 manières de construire cette cubique :

- en la considérant comme une isocubique non-pivotale en référence au QA; on détermine les intersections de la conique isoconjuguée d'une droite passant par Isg avec la perpendiculaire à cette droite au point Isg.
- en la considérant comme une isocubique isogonale circulaire focale par rapport au triangle EPIsgIsg', le pivot étant le point à l'infini de la médiatrice du segment EPIsg.

On peut construire de la même manière une seconde cubique isogonale circulaire focale par rapport au triangle de Miquel formé par les points GS, Isg et F, le pivot étant alors le point à l'infini de la médiatrice du segment GSIsg.



Récapitulatif des transformations rencontrées

Avant d'aborder la suite consacrée au quadrilatère complet et aux propriétés de la dualité QA/QC, on va récapituler les transformations rencontrées

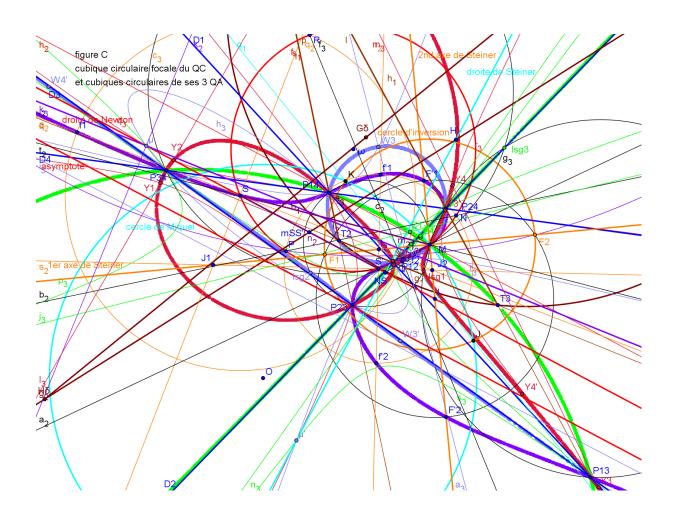
- transformation φ ou isoconjugaison appelée QA-Tf2 dans EQF transformation par rapport à un triangle de référence qui associe 2 points isoconjugués ; elle a 4 points fixes et le conjugué d'un point est le point de concours des polaires de ces points par rapport aux coniques diagonales par ces 4 points
- les transformations isogonale et isotomique sont 2 cas particuliers d'isoconjugaison
- transformation quasi-isogonale appelée QG-Tf2 dans EQF transformation par rapport à un triangle de référence, DT d'un QA, qui associe à un point l'intersection des symétriques des céviennes de ce point par rapport aux bissectrices des angles formés par les couples de côtés opposés du QA
- transformation ψ appelée QA-Tf4 ou QL-Tf1 dans EQF
 transformation de Moebius qui associe une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle centré sur l'axe de la symétrie ; les 2 points fixes sont les extrémités d'un diamètre situé aussi sur cet axe, appelé 1^{er} axe de Steiner
- inversions (propriétés d'une courbe anallagmatique) les centres des cercles inscrit et exinscrits du triangle de Miquel sont les centres d'inversion laissant la cubique circulaire globalement invariante
- autres transformations
 - la cubique circulaire est déterminée par son triangle de Miquel et son asymptote ; elle passe par les 3 sommets et les centres des cercles inscrit et exinscrits de ce triangle et par l'isogonal du point à l'infini de l'asymptote par rapport à ce triangle.
 - Pout tout point de la cubique, on a vu qu'il forme avec ses 3 transformés ψ le QA tangentiel d'un point Isg de la courbe ; son conjugué isogonal par rapport au triangle de Miquel est le point GS du QA, centre de perspective entre le DT du QA et le triangle de Miquel. La transformation ϕ déterminée par le QA donne le point Isg'.
 - Toute transformation associant à un point de la cubique un des autres points variables mentionnés (sommets du DT et leurs sogonaux, points GS et Isg, point Isg' et son isogonal ...) laisse par construction la cubique globalement invariantes.

Seconde partie

Le quadrilatère complet, la transformation ψ

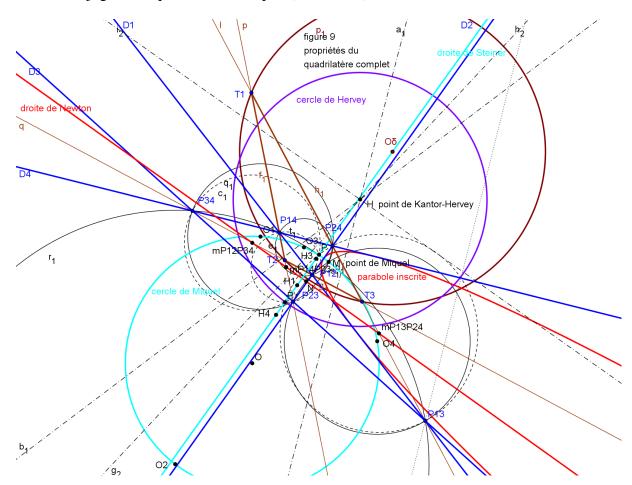
et

la cubique circulaire focale de Van Rees



A) Quadrilatère complet

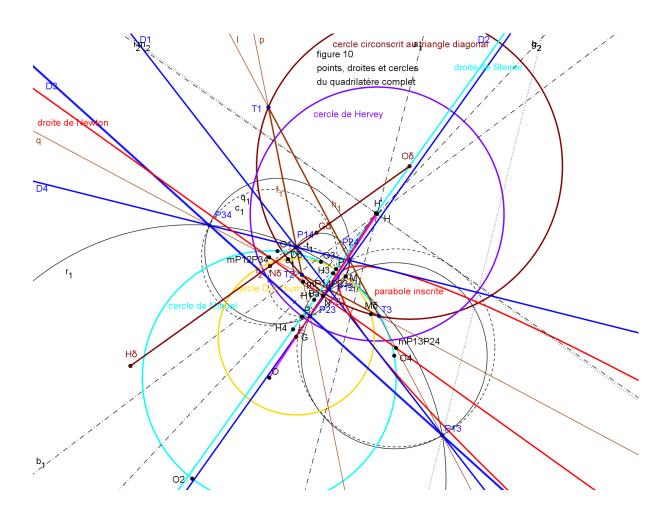
- **1.** Propriétés du quadrilatère complet (figure 9)
- Les milieux des diagonales AijAkl sont alignés sur une droite Δn, appelée droite de Newton; les 3 cercles de diamètres AijAkl se coupent en 2 points, dits de Plücker.
- Les 4 orthocentres Hi des triangles de référence sont alignés sur une droite Δh, appelée droite de Steiner, qui contient les 2 points de Plücker et le centre Oδ du cercle circonscrit au triangle diagonal.
- Les 4 cercles circonscrits passent par un même point M, appelé point de Miquel ; leurs centres Oi et le point M sont sur un même cercle de centre O, appelé cercle de Miquel.
- Les médiatrices des segments OiHi concourent au point H, dit de Kantor-Hervey.
- Le cercle de centre N, milieu de OH situé sur la droite de Newton, est le cercle de Plücker et passe par M et les points de Plücker; le cercle de centre G, milieu de ON et passant par M est le cercle Dimidium.
- Le cercle de centre H symétrique du cercle de Miquel par rapport à N est le cercle de Hervey.
- La parabole de foyer M et de directrice Δh est tangente aux 4 droites Di.
- La cardioïde de centre O et de point de rebroussement M est tangente aux 4 cercles ; elle est la transformée Clawson-Schmidt de la parabole (cf article 3 et infra).
- La deltoïde ou hypocycloïde à 3 rebroussements tangente aux 4 droites Di admet le cercle de Hervey comme cercle intérieur (cf article 1).
- Les 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites Di ont leurs centres sur la stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet (cf article 2).



2. Principaux points, droites et cercles du quadrilatère complet (figure 10)

On considère un QC formé par 4 droites Di ; les intersections sont les 6 sommets Aij. On utilise les notations EQF et on s'intéressera aux points principaux suivants :

- QL-P1 M point de Miquel, foyer de la parabole inscrite
- QL-P2 H' point de Morley, barycentre des Hi
- QL-P3 H point de Kantor-Hervey, centre du cercle de Hervey
- QL-P4 O centre centrique, centre du cercle de Miquel
- QL-P5 N milieu de OH, centre du cercle de Plücker
- QL-P6 G point Dimidium, milieu de ON, centre du cercle Dimidium, barycentre des Oi
- QL-P7 NS point de Newton-Steiner, intersection des droites de Newton et de Steiner
- QL-P8 Gδ centre de gravité du triangle diagonal DT
- QL-P9 Oδ centre du cercle circonscrit du triangle diagonal DT
- QL-P10 Hδ orthocentre du triangle diagonal DT
- QL-P11 Nδ centre du cercle d'Euler du triangle diagonal DT
- QL-P12 B barycentre des 6 sommets du QC
- QL-P13 P8 centre de perspective entre le 1er et le 2nd triangle diagonal
- QL-P17 Mδ point de Miquel du QC diagonal
- QL-P24 D8 2nd point d'intersection du cercle Dimidium avec le cercle circonscrit à DT
- QL-P25 foyer de la parabole associée-complément du point Mδ ou P17 par rapport à DT
- QL-P26 K point de Lemoine du QC
- QL-2P1 a et b P et P' points de Plücker sur la droite de Steiner



B) Transformation ψ du quadrilatère complet (figure 11)

La transformation ψ pour le QC, appelée QL-Tf1 ou Clawson-Schmidt dans EQF, se définit comme celle du triangle (cf article 3) comme une involution associant une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle centré sur l'axe de symétrie.

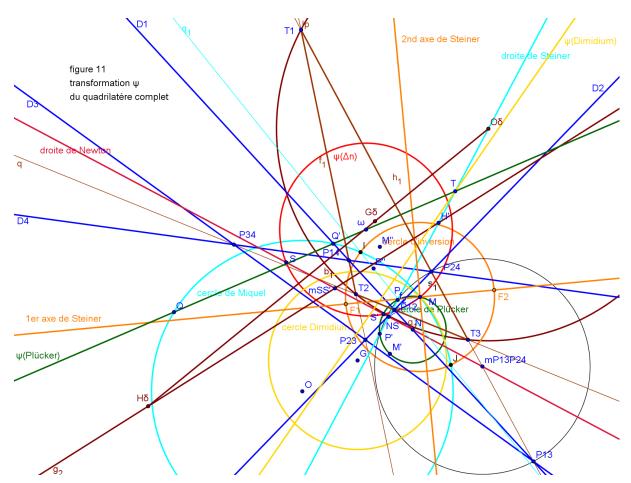
Elle a 2 points invariants F1 et F2, QL-2P3 a et b de EQF, points de base ou de Poncelet des 8 cercles de Steiner passant par les 16 centres des cercles inscrit et exinscrits des 4 triangles de référence (4 points sur chaque cercle et 2 cercles par chaque point, 1 dans chaque faisceau).

L'axe de symétrie est la droite F1F2 ou 1^{er} axe de Steiner, la médiatrice de F1F2 est le 2nd axe de Steiner; ce sont les bissectrices de l'angle entre les axes de la parabole et de la cardioïde.

Le cercle d'inversion est le cercle de diamètre F1F2 et de centre le point de Miquel M.

La transformation ψ échange :

- les sommets opposés Aij et Akl du QC
- les 4 droites Di et les 4 cercles circonscrits aux triangles de référence et les symétriques de M par rapport aux 4 droites et les centres de ces 4 cercles
- la droite de Steiner Δh et le cercle de Miquel et le symétrique de M par rapport à Δh et le centre O du cercle de Miquel
- les 2 points de Plücker P et P' et 2 points Q et Q' du cercle de Miquel
- la droite de Newton Δn et un cercle centré sur QQ'
- le cercle de Plücker et la droite OO'
- le cercle Dimidium et une droite qui passe par le point d'intersection ω de QQ' avec Δh ; cette droite contient le point K de Lemoine du QC



C) Courbe cubique circulaire focale de Van Rees

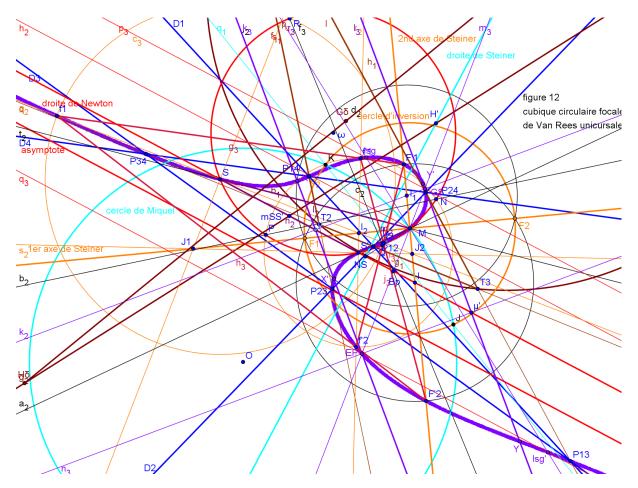
1. Courbe de Van Rees unicursale (figure 12)

Les propriétés et la construction de la courbe de Van Rees ont été expliquées dans les articles 2 et 3 ; cette cubique est la hessienne de la stelloïde cubique conjuguée du QC, elle est unicursale si la SC est de type MacCay et bicursale si la SC est de type Kjp (cf B. Gibert). La cubique de Van Rees unicursale (cas de la figure 12) coupe la droite de Newton en 2 points réels S et S', dont le milieu est l'intersection de Δn avec la droite HδH' (directrice de la parabole de foyer Mδ tangente aux 3 côtés du triangle diagonal et à la droite de Newton). On met en évidence les transformations ψ de centres S et S', d'axes de Steiner les bissectrices des angles en S et S' et de points fixes f1 et f2 et f'1 et f'2 ; on rappelle que la transformation ψ de centre M a pour axes de Steiner les bissectrices en M et pour points fixes F1 et F2. La cubique focale unicursale de Van Rees passe par les couples de points conjugués f1 et f2, f'1 et f'2 et par le couple F'1F'2 sur le 2nd axe de Steiner ; les 6 points définissent un QC.

La cubique de Van Rees est l'isocubique pivotale d'un QA à 2 côtés perpendiculaires.

Pour un point de la courbe pris comme tangentiel Isg, les 2 droites perpendiculaires forment sa conique polaire dégénérée (bissectrices de l'angle SEPS', EP étant le conjugué ψ de Isg). Cette cubique est invariante dans les 3 transformations ψ , mais le triangle MSS' n'est pas le triangle de Miquel, car les transformés des sommets réels d'un QA donnent les sommets d'un autre QA situés sur un côté parallèle à celui du 1er.

Dans le cas de la cubique de Van Rees unicursale, tous les QA tangentiels ont 2 côtés perpendiculaires, mais 2 points seulement sont réels, les 2 autres étant imaginaires. Il y a 3 QA orthocentriques formant un système Desmic, de tangentiels S et S' et le point à l'infini de la droite de Newton; chaque QA a 2 points réels (f'1, f'2, f1, f2, F'1 et F'2).



2. Triangle MVV' ou MSS' (figure 13)

On a en réalité 2 points S et S', intersections de la droite de Newton avec la cubique unicursale et 2 points V et V' de la cubique bicursale symétriques par rapport à la droite de Newton. Les 4 points S et S' et V et V' ne peuvent être réels simultanément.

Dans le cas de la cubique focale de Van Rees bicursale (voir figure 13), la droite de Newton est la médiatrice du segment VV' et le triangle MVV' est le triangle de Miquel de la cubique ; on retrouve une isocubique pivotale circulaire pour un QA ayant 2 cordes perpendiculaires.

Les 3 transformations ψ sont les mêmes et la cubique est toujours invariante dans ces 3 transformations, mais la cubique ne passe plus par les points fixes f1 et f2, f'1 et f'2 ni par les points F'1 et F'2 (dont les milieux ne sont plus sur la droite de Newton); elle passe en revanche par les points M, V et V' et par les centres I, J1, J2 et J3 des cercles inscrit et exinscrits du triangle MVV' (propriété de la cubique circulaire du QA).

La cubique circulaire focale unicursale ne passait pas ces points pour le triangle MSS', ce qui montre à nouveau que ce triangle ne pouvait être un triangle de Miquel comme le triangle GVV'; du reste, les 4 centres des cercles inscrit et exinscrits du triangle MVV' sont les centres d'inversion de la cubique bicursale alors que F'1 et F'2 sont les 2 centres d'inversion réels de la cubique unicursale, les 2 autres sur le 1^{er} axe de Steiner étant imaginaires.

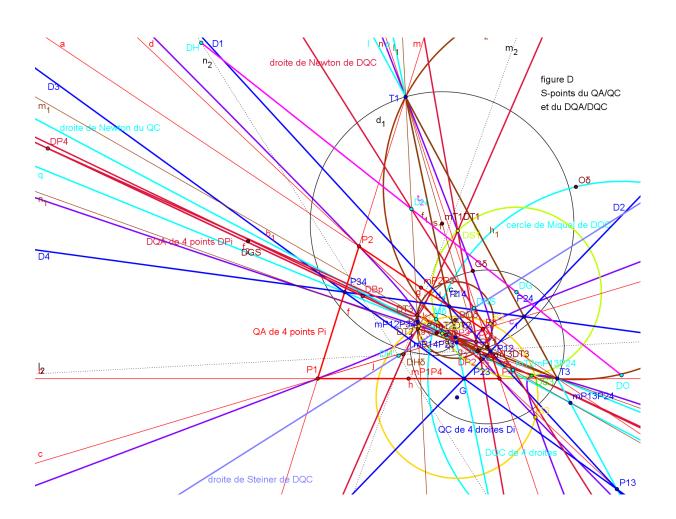
Pour un point de la cubique bicursale pris comme tangentiel Isg, les 2 côtés perpendiculaires sont encore les 2 droites formant la conique polaire dégénérée (bissectrices de l'angle VEPV', EP étant le conjugué ψ de Isg), mais surtout il y a cette fois un seul QA dont les 4 sommets sont réels, 3 d'entre eux étant les conjugués ψ du $4^{\text{ème}}$ dans les 3 transformations.

Il y a toujours 3 QA orthocentriques formant un système Desmic : leurs tangentiels sont les points imaginaires S et S' et le point à l'infini de la droite de Newton (seul QA réel IJ1J2J3).



Troisième partie

La dualité dans le quadrangle/quadrilatère



A) Dualité

1. Quadrangle et quadrilatère complets duaux (figure 14)

En partant des 4 points Pi, i=1 à 4, on a construit le triangle DT de sommets Ti, i=1 à 3, et on a vu que ce triangle était le triangle cévien de chaque point Pi par rapport au triagle PjPkPl. On construit maintenant pour chaque point Pi le triangle de sommets PjkPjlPkl comme triangle cévien de Pi par rapport à DT; les points Pij, Pik et Pil sont alignés sur la droite Di, polaire trilinéaire de Pi par rapport à DT, les points Pjk, Pjl et Pkl étant les conjugués harmoniques des sommets de DT par rapport aux couples Pi et Pl, Pi et Pk et Pi et Pj.

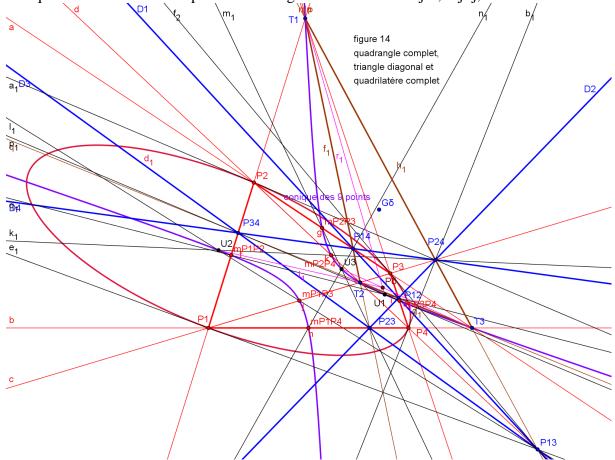
Le QC formé par les 4 droites Di est la figure duale du QA formé par les 4 points Pi ; par construction, les 2 figures ont le même triangle diagonal.

Il y a (au moins) 3 manières de construire cette figure :

- à partir du QA, on construit le DT et le QC comme céviens successifs
- à partir du QC, on construit le DT et le QA comme centres de perspective
- à partir du DT,
 - o avec un point Pi, les 3 autres sont les sommets de son triangle anticévien/DT
 - o avec une droite Di, le point Pi est son pôle trilinéaire/DT
 - o avec le point Pδ, pôle de l'isoconjugaison, les 4 Pi sont les points fixes
 - o avec la droite de Newton Δn , son pôle trilinéaire est le point P δ

Le rapprochement du QA et du QC duaux sur une figure globale permet de mettre en évidence des propriétés duales ; ainsi, le triangle de Miquel du QA et le triangle diagonal sont en perspective de centre le point GS et le triangle de Gergonne-Steiner du QC et le triangle diagonal sont en perspective de centre le point de Miquel.

Les points U1, U2 et U3, intersections de PijmPiPj avec PklmPkPl, sont les centres de coniques circonscrites aux 4 points Pi et tangentes aux droites PijPi, PijPj, PklPk et PklPl.



2. Dualité point-droite sur la figure QA/QC (figure 15)

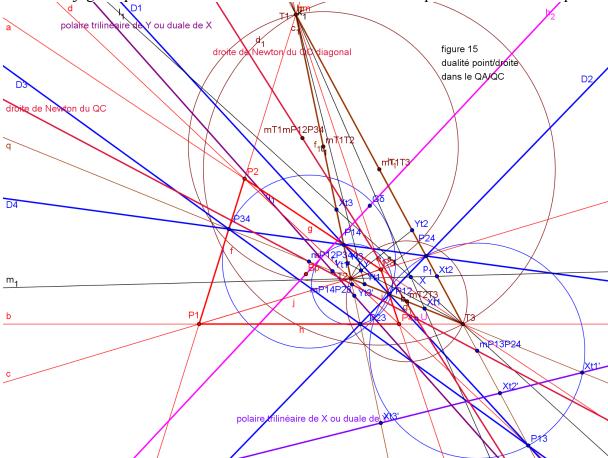
On définit la dualité point-droite sur la figure QA/QC en utilisant 2 transformations déjà vues précédemment ainsi que la polarité trilinéaire par rapport au triangle diagonal :

- pour un point, l'isoconjugaison φ (QA-Tf2 dans EQF), qui lui associe le point de concours de ses polaires par rapport aux coniques diagonales passant par les 4 points fixes de l'isoconjugaison
- pour une droite, la transformation t (QL-Tf2 dans EQF), qui lui associe la droite passant par les conjugués harmoniques de ses points d'intersection avec les côtés du triangle diagonal par rapport aux couples de sommets du QC
- dans la polarité par rapport au triangle diagonal, p est la droite polaire du pôle P On a alors indifféremment

point → isoconjugué φ → polaire trilinéaire → polaire trilinéaire → transformée t droite → pôle trilinéaire → isoconjugué φ → transformée t → pôle trilinéaire

on notera, pour un point X et sa droite duale D, X étant le point dual de D, les transformations réciproques $p^*\phi = t^*p$ et $\phi^*P = P^*t$, çàd $D = p[\phi(X)] = t[p(X)]$ et $X = \phi[P(D)] = P[t(D)]$ Par définition, les 4 sommets du QA ont pour droites duales les 4 droites du QC et les 3 sommets du triangle diagonal ont pour droites duales ses côtés, ce triangle étant autodual. Réciproquement, les 6 sommets du QC ont pour droites duales les 6 côtés du QA.

Le point Gδ, centre de gravité de DT, a pour duale la droite de Newton Δn, polaire trilinéaire de l'isoconjugué Pδ et transformée t de la droite de l'infini, polaire trilinéaire de Gδ. Le point Bp, isobarycentre du QA, a pour duale la droite de Newton du QC diagonal, polaire trilinéaire de l'isoconjugué Bp'. L'intersection U des 2 droites de Newton a pour duale la droite BpGδ.



3. Dualité conique/conique sur la figure QA/QC (figure 16)

La courbe duale d'une courbe se définit comme l'enveloppe des droites duales de ses points ou comme le lieu des points duaux de ses tangentes. La dualité est donc réciproque et le degré de la courbe duale est la classe ou nombre de tangentes menées par un point à la courbe.

La courbe qui se prête le mieux à la dualité est la conique, de degré 2 et de classe 2.

Une conique diagonale passant par les 4 sommets Pi du QA (centrée sur la conique des 9 points) a pour duale une conique inscrite dans le QC (centrée sur la droite de Newton).

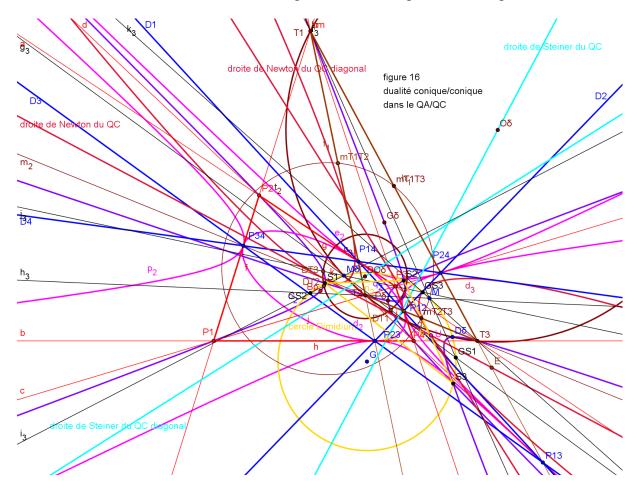
Ainsi, la conique diagonale passant par Bp et P δ et par les sommets de DDT, DT du QC diagonal, a pour duale la parabole de foyer M et directrice la droite de Steiner; elle est tangente à la droite de Newton du QC diagonal et à la droite de l'infini, duales de Bp et P δ .

DT est un triangle autodual et toute conique circonscrite a pour duale une conique inscrite.

Ainsi, la conique circonscrite passant par Gδ et Pδ a pour duale la parabole du QC diagonal formé par les 3 côtés de DT et la droite de Newton ; elle a pour foyer Mδ et pour directrice la droite de Steiner du QC diagonal, la droite H'Hδ.

Ces 2 coniques se coupent en 4 points, qui sont Pδ et les 3 S-points ; leurs duales sont les 2 paraboles inscrites dans le QC et le QC diagonal, la 1ère est inscrite dans le triangle médial de DT (dont les côtés sont les duales de DDT) et la 2^{nde} dans le DT ; les 2 sont inscrites dans le triangle des S-points, autodual comme DT (cercle circonscrit Dimidium de centre G, centre de gravité l'isobarycentre B du QC et orthocentre le point de Morley H' du QC).

La conique circonscrite au triangle médial de DT et passant par les points Bp et Gδ est aussi circonscrite au triangle des S-points; sa conique duale est inscrite dans le triangle des S-points, dans le triangle DDT (de côtés les duales des milieux des côtés de DT) et est tangente aux droites de Newton du QC et du QC diagonal, duales des points Gδ et Bp.



B) Exemples d'application

1. Intersection des droites du QA/QC (figure 17)

On a vu que les sommets Pij et Pkl du QC sont respectivement les conjugués harmoniques du sommet de DT intersection des côtés PiPj et PkPl par rapport aux points Pk et Pl et Pi et Pj.

Du coup, il est aisé de mettre en évidence un grand nombre de faisceaux harmoniques.

On considère sur chaque droite Di du QC les intersections Xi, Yi et Zi avec les 3 côtés du QA issus du point Pi; ces points sont les conjugués harmoniques de chacun des 3 points Pij, Pik et Pil par rapport aux 2 autres.

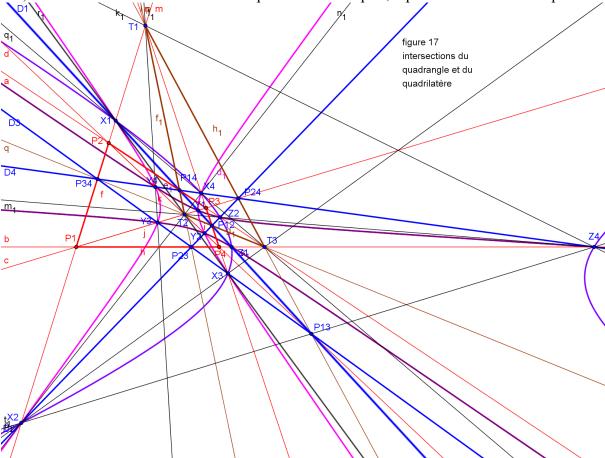
Les 12 points Xi, Yi et Zi sont les intersections des 6 côtés du QA et des 4 côtés du QC (chaque point étant compté double); les droites duales de ces points sont les 12 droites joignant les 4 sommets du QA aux 6 sommets du QC (chaque droite étant comptée double).

Les 3 QA formés par les 4 Xi, les 4 Yi et les 4 Zi ont pour DT le DT du QA/QC; chacun des 4 points Xi, Yi ou Zi a pour triangle anticévien par rapport à DT le triangle formé par les 3 autres points X, Y ou Z.

Or toute conique diagonale par les 4 points Xi, Yi ou Zi contient les sommets des triangles anticéviens de tous ses points. Du coup, il existe 3 coniques de 8 points passant respectivement par les 4 Xi et les 4 Yi, les 4 Xi et les 4 Zi et les 4 Yi et les 4 Zi.

Les points d'intersection des 3 coniques 2 à 2 ont pour duales les tangentes communes aux duales des 2 coniques ; mieux encore, chaque conique duale d'une des 3 coniques est tangente aux 2 autres coniques et chaque conique est tangente aux duales des 2 autres.

Xi étant par exemple sur la droite Di le conjugué harmonique de Pij par rapport à Pik et Pil, on peut recommencer en considérant toujours sur Di les conjugués harmoniques Ui de Pik par rapport à Xi et Pil et U'i de Pil par rapport à Xi et Pik. On trouve cette fois 24 points Ui et U'i, Vi et V'i et Wi et W'i à leur tour 8 par 8 sur 6 coniques, 4 points étant sur 2 coniques ...



2. Construction du QA/QC diagonal DQA/DQC (figure 18)

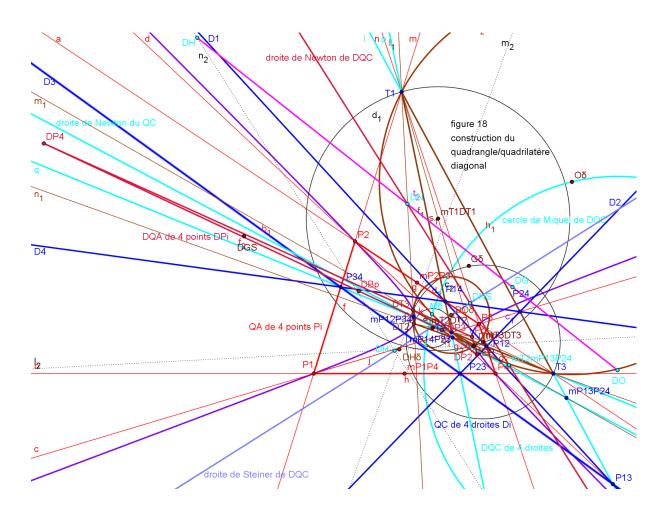
On définit le QC diagonal ou DQC comme le QC formé par les 3 diagonales et la droite de Newton du QC; on a vu que sa droite de Newton ou $D\Delta n$ était la duale de Bp.

Le triangle diagonal de DQC est appelé DDT; c'est le triangle anticévien de P δ par rapport à DT, la droite de Newton étant la polaire trilinéaire de ce point par rapport à DT. Ses sommets sont sur la conique diagonale (par les 4 sommets du QA) passant par les points Bp et P δ (cette conique contient les sommets des triangles anticéviens de tous ses points).

Le QA ayant le même DDT est formé par le point $P\delta$ et les sommets de son triangle anticévien par rapport à DDT. (Cette construction est la même que pour le QA, DT étant le triangle anticévien d'un sommet du QA par rapport à un triangle de référence du QC et les 3 autres sommets du QA étant les sommets du triangle anticévien du 1^{er} par rapport à ce DT).

(Il convient de noter que DQA et DQC sont des figures duales dans leur système, mais pas dans le système QA/QC ; le QA dual de DQC est formé par les sommets de DT et le point P\delta) La transformation D ψ du DQC a pour centre M δ et échange les 2 points de Plücker P et P' sur la droite de Steiner, leurs transformés ψ Q et Q' sur le cercle de Miquel ainsi que la droite de Newton et le cercle circonscrit au triangle diagonal.

Tous les éléments étant réunis, il est alors possible de trouver les principaux points, droites et cercles du DQA/DQC; le point DM est $M\delta$, DB est le milieu de $G\delta B$, DG est le milieu de $G\delta B$, DH' est le milieu de H'H δB . On a la parabole inscrite de foyer $M\delta B$ et de droite de Steiner la droite H'H δB et on pourrait même tracer la courbe focale circulaire de Van Rees du DQC ...

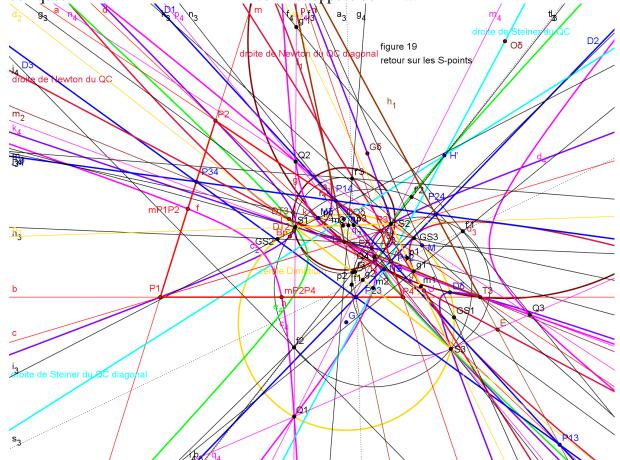


3. Retour sur les S-points (figure 19)

Le triangle des S-points détient dans la figure QA/QC de même DT le record du nombre de coniques circonscrites, les coniques étant inscrites dans ce triangle, qui est autodual ; on a déjà décrit p.26 3 de ces coniques et on en trouvera bien d'autres dans le résumé p.32.

Une 1ère manière d'appréhender ces coniques circonscrites est de considérer l'isoconjugaison de ce triangle qui associe comme pôle à son centre de gravité (isobarycentre B des 6 sommets du QC) le point Pδ. On détermine les 4 points fixes Qi de l'isoconjugaison en utilisant une construction fournie par Bernard Gibert. On détermine les triangles céviens de B et Pδ par rapport au S-triangle, de sommets mi et pi ; la perpendiculaire à un côté par le point pi coupe le cercle de centre mi et diamètre SjSk en 2 points fi et f'i. Les bissectrices des angles SjfiSk coupent les côtés SjSk en 2 points gi et g'i ; les 6 droites Sigi et Sig'i se coupent 3 par 3 aux 4 points Qi cherchés (ils sont sur la conique des 9 points du QA des 4 points Pi). Toute conique circonscrite au triangle des S-points est alors l'isoconjuguée d'une droite.

Une 2^{nde} manière consiste à considérer les 2 paraboles du QC et du QC diagonal, de foyers M et M δ et de directrices les droites de Steiner des 2 QC, duales des coniques diagonale par les 4 sommets Pi du QA, Bp et P δ et circonscrite par G δ et P δ , et leurs tangentes, droites de Newton du QC et du QC diagonal. Toute conique circonscrite recoupe le cercle Dimidium en un $4^{\delta me}$ point D; DM recoupe la conique en un 2^{nd} point G et DM δ en un 2^{nd} point P. Les droites de Newton du QC et du QC diagonal coupent la conique en X et Y et X' et Y'; D, M δ , X, Y et G sont cocycliques ainsi que D, M, X', Y' et P. Ainsi, pour la conique diagonale, D = ψ (K), G = P δ et P = Bp, pour la conique circonscrite à DT par G δ et P δ , D = D δ , G = G δ et P = P δ , pour la conique circonscrite au triangle d'Euler de DT, D est la 2^{nde} intersection des cercles Dimidium et EulerDT, G est le pôle de G δ P δ / conique circonscrite et P = G δ ; on a 3 coniques avec G milieu d'un côté et P sommet opposé de DT ...



Annexe : génération de points du QA/QC

A) Points EQF

1. Triangles

On a vu qu'un QA détermine 3 QC et réciproquement un QC détermine 3 QA. Pour un QA, on a donc 3 versions de chaque point du QC; on trouve par exemple dans EQF

- le triangle QA-Tr2 des 3 points de Miquel M ou QL-P1
- le triangle QA-Tr des 3 points de Morley H' ou QL-P2
- le triangle QA-Tr des 3 barycentres B ou QL-P12

Pour un QC, on a de même 3 versions de chaque point du QA; on trouve ainsi dans EQF le triangle des 3 points de Gergonne-Steiner GS (sur le cercle Dimidium).

Bien sûr, on peut prendre les 3 versions d'une même droite ou d'un même cercle ; les 3 cercles Dimidium ou QL-Ci6 se coupent au point de Gergonne-Steiner QA-P3 ...

2. QA ou QC

En raisonnant sur la figure QA/QC, on détermine pour chaque point ou chaque droite d'un des 2 éléments un QA ou un QC formé par ce point ou cette droite et les 3 versions du même point ou de la même droite dans l'élément dual.

Ainsi par exemple, pour la figure QA/QC, le point de Miquel du QC et les 3 sommets du triangle de Miquel du QA déterminent le Miquel-QA ou la droite de Newton du QC et les 3 droites de Newton des QC du QA définissent le Newton-QC ...

B) Points ETC dans EQF

1. Points ETC dans les triangles de référence du QA ou du QC

Cette fois, on utilise les points ou droites ETC du triangle et on considère le QA formé par les 4 points ou le QC formé par les 4 droites occupant la même fonction dans les 4 triangles de référence du QA ou du QC.

On aura ainsi par exemple le QA des centres des cercles inscrits, des centres de gravité, des centres des cercles circonscrits, des orthocentres ou le QC des droites d'Euler ou des droites de Brocard ...

Les 4 centres des cercles circonscrits des triangles de référence du QC sont cocycliques (cercle de Miquel) et les 4 orthocentres sont alignés (droite de Steiner).

2. Points ETC dans le triangle diagonal

Pour un triangle diagonal donné, on a vu que le QA est formé par un point Pi et les sommets du triangle anticévien de ce point par rapport au triangle diagonal.

Il est aussi constitué par les 4 points fixes de l'isoconjugaison de triangle DT qui a pour pôle l'isoconjugué Pδ du centre de gravité Gδ de ce triangle.

On sait construire alors le QC dual de ce QA.

En prenant comme points Pi ou P δ des points ETC du triangle diagonal, on forme autant de QA/QC ; il y a aujourd'hui plus de 10000 points recensés dans ETC ...

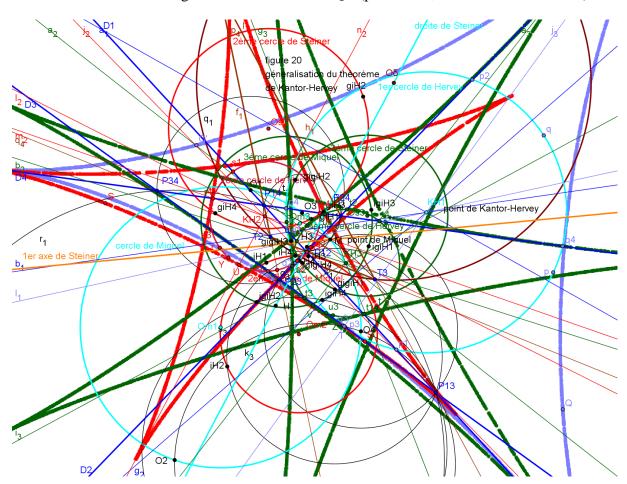
C) Généralisation du théorème de Kantor-Hervey (figure 20)

On définit les points de Hofstadter Hr d'un triangle ABC : on porte en B et C du même côté de BC les angles <rB> et <rC> ; les 2 droites se coupent en A'. On détermine de même les points B' et C' ; AA', BB' et CC' se coupent en un point Hr.

On montre que le conjugué isogonal du point Hr est le point H1-r et l'inverse de Hr par rapport au cercle circonscrit est le point H2+r.

En considérant les points de Hofstadter pour r entier et en alternant les 2 opérations isogonalité et inversion, on obtient, à partir du centre du cercle circonscrit, une série de points orthocentre, inverse de l'orthocentre, isogonal de l'inverse, inverse de l'isogonal de l'inverse. En considérant cette série de points pour les 4 triangles de référence du QC, on observe :

- les 4 points de même rang r entier sont cocycliques
- les 2 cercles de points isogonaux de même rang sont conjugués ψ
- les médiatrices des segments joignant 2 points isogonaux de chaque triangle sont concourantes (généralisation du théorème de Kantor-Hervey).
- les cercles passant par Pij et 2 points Xk et Xl de Hofstadter des 2 triangles ayant le point Pij comme sommet commun coupent les droites Di et Dj du QC passant par le point Pij en 2 points (autres que Pij) pi et pj, qi et qj, ri et rj ...
- les 8 points correspondant à 2 points de Hofstadter isogonaux (pi et qi, ri et si, ti et ui) sont cocycliques sur les cercles de Hervey de centres les points de Kantor-Hervey.
- sur chacun de ces cercles, on peut trouver 2n + 1 points divisant les arcs de cercle piqi, risi, tiui ... dans le rapport n/n+1
- on reconnait la construction d'une série d'hypocycloïdes à 2n + 1 points de rebroussement tangentes aux 4 droites du QC (pour n = 1, on retrouve la deltoïde).



Résumé

Au terme de ce survol rapide des propriétés du QA et de ses isocubiques, quelques points apparaissent intéressants.

- le premier est l'identification de la cubique circulaire focale de Van Rees comme un cas particulier de cubique circulaire pour un QA à 2 côtés opposés perpendiculaires, ces 2 côtés constituant la conique polaire dégénérée du tangentiel des 4 sommets qui est alors le conjugué ψ du point d'intersection des 2 côtés.
 - o dans la version unicursale, un seul des 2 côtés est réel, il porte 2 points de la courbe, l'autre côté et les 2 autres points sont imaginaires ; les transformés ψ dans les transformations de points S et S' donnent un côté parallèle au premier, appartenant à un 2nd QA, dont l'autre côté perpendiculaire est aussi imaginaire
 - o dans la version bicursale, les 2 côtés sont réels et perpendiculaires et portent les 4 sommets d'un seul QA avec son tangentiel, conjugué ψ de l'intersection des 2 côtés, son DT en perspective avec le triangle de Miquel MVV'.
- le second est la nécessité absolue de considérer les figures duales du QA et du QC ayant même DT comme indissociables ; le QC sans le QA, c'est Pollux sans Castor. On définit alors la dualité point/droite par rapport à cette figure en combinant l'isoconjugaison point/point du QA, la transformation harmonique droite/droite du QC et la transformation point/droite pôle/polaire trilinéaire par rapport à DT.
- la figure du triangle des S-points est précisément la charnière entre les 2 figures et on a déjà vu (cf p.29) plusieurs exemples de coniques passant par ces 3 points et relevant du OA (conique diagonale par les sommets du OA, Bp et Pδ) ou du OA/OL (coniques circonscrites au DT ou à son triangle médial et coniques passant par 1 sommet et le milieu du côté opposé). On peut ajouter 3 coniques relevant du QC et passant par 2 sommets conjugués du OC, 1 sommet de DT et 1 sommet de DDT; en ce cas, les points D sont les points de Gergonne-Steiner des 3 QA du QC et les points G et P sont les sommets de DT et de DDT. On peut mentionner encore, relevant du QC, l'hyperbole équilatère passant par H' (orthocentre du S-triangle), NS (intersection des droites de Newton et Steiner du QC), I, point de contact de la droite de Newton avec la parabole inscrite du DQC et J, intersection de la droite de Steiner du DQC, directrice de sa parabole avec la perpendiculaire à cette droite menée par le point I; les points G et P sont alors NS et J. Si la conique est le cercle Dimidium, les points D, G et P sont indéterminés. Si la conique est l'ellipse circonscrite de Steiner du S-triangle, D est son point de Steiner, G est sur la 1ère conique diagonale et P sur la 2^{nde} circonscrite; la conique duale de l'ellipse inscrite de Steiner passe par Bp et par ce même point P.
- Toute la construction mérite d'être rappelée
 - o on part d'un DT de centre de gravité Gδ et d'un point intérieur Pδ
 - o les points fixes de l'isoconjugaison de triangle DT et de pôle $P\delta$ sont les sommets du QA et les polaires trilinéaires de ces points sont les droites du QC
 - \circ la parabole tangente aux 4 droites a pour foyer M et directrice la droite Δh
 - o la polaire trilinéaire de P δ est la droite de Newton Δ n et la parabole tangente aux côtés de DT et à Δ n a pour foyer M δ et directrice la droite H'H δ
 - o le S-triangle a ses côtés tangents aux 2 paraboles
- Enfin, la découverte sans contexte la plus spectaculaire (d'autant plus remarquable qu'étant sans rapport avec la dualité, elle était parfaitement inattendue) est la généralisation du théorème de Kantor-Hervey, la concurrence des médiatrices des segments joignant les points isogonaux de Hofstadter pour r entier et l'extension de la deltoïde à une infinité d'hypocycloïdes à 2n + 1 points de rebroussements tangentes aux 4 droites du QC et ayant pour cercles intérieurs les cercles de Hervey.

Bibliographie

On indique ici seulement les références indispensables à la compréhension des objets abordés (Quadrangle et Quadrilatère Complets, isocubiques et transformation φ et ψ).

Quadrangle Complet

- (1) Geometrikon Complete Quadrangle and Duality
- (2) Eckart Schmidt Das Steiner Dreieck von vier Punkten
 Miquel-, Poncelet- und Bennett Punkt eines Vierecks
 Geometrie auf der Zirkularkurve
- (3) Benedetto Scimemi Central Points of the Complete Quadrangle Milan 2007

Quadrilatère Complet

- (4) J. Steiner Théorème sur le Quadrilatère Complet Annales de Gergonne 1827
- (5) J.W. Clawson The Complete Quadrilateral 1919
- (6) Jean-Pierre Ehrmann Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral 2004
- (7) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

Isocubiques et transformation φ

- (8) Jules Marchand Géométrie du Quadrilatère Complet Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles 1937
- (9) Bernard Keizer Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014
- (10) Jean-Pierre Ehrmann-Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane 2015
- (11) Bernard Gibert Inscribed Cardioïds and Eckart Cubics 2013

Transformation ψ

- (12) Bernard Gibert Orthocorrespondance and Orthopivotal Cubics Forum Geometricorum 2003
- (13) Benedetto Scimemi Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle Forum Geometricorum 2010
- (14) Bernard Keizer Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation ψ 2015

Sites Internet

- http://bernardkeizer.blogspot.fr , articles de Bernard Keizer
- http://retro.seals.ch/stelloïde cubique, article de Jules Marchand
- <u>www.faculty.evansville.edu</u>, Encyclopedia of Triangle Centers ETC, site de Clark Kimberling consacré aux points remarquables du triangle
- <u>www.chrisvantienhoven.nl</u>, Encyclopedia of Quadri-Figures, site de Chris van Tienhoven consacré aux éléments remarquables des quadrangles et quadrilatères
- <u>www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr</u> , site de Bernard Gibert consacré aux cubiques et autres courbes liées
- www.eckartschmidt.de, articles de Eckart Schmidt
- http://users.math.uoc.gr, site de Geometrikon, université de Crète

Le serpent ούροβόρος

Ce dernier article s'achève ainsi là où commençait le premier : la généralisation du théorème de Kantor-Hervey à l'ensemble des couples de points isogonaux de Hofstadter pour r entier dans les triangles de référence du quadrilatère complet permet la construction d'une infinité d'hypocycloïdes à 2n + 1 points de rebroussements tangentes aux 4 droites (*).

Ceci évoque irrésistiblement la figure mythologique du serpent ούροβόρος qui se mord la queue. Cet esprit qui tourne en rond manifeste-t-il le degré ultime de la sagesse ou le premier signe de sénilité, je laisse à mes enfants et amis et à mes trop rares lecteurs le soin d'en décider ...

- (*) Cette généralisation est en réalité elle-même un cas particulier d'une propriété encore plus large des épi- ou hypocycloïdes tangentes aux 4 droites du QC. Les épi- ou hypocycloïdes E ou H sont définies comme enveloppes de droites MN telles que les points M et N décrivent un même cercle à des vitesses respectives p et q, où p et q sont entiers et premiers entre eux, de même signe pour les épicycloïdes et de signe contraire pour les hypocycloïdes.
 - Il y a $(p+q)^3$ épi- ou hypocycloïdes tangentes aux 4 droites du QC
 - Leurs centres sont à l'intersection des maillages de $(p +q)^2$ droites par triangle de référence du QC, (p +q) centres par droite et chaque centres sur 4 droites
 - Ces droites sont les médiatrices de couples de points isogonaux d'où l'on voit les 3 côtés du triangle sous des angles proportionnels aux côtés opposé dans un facteur p/(p+q) et q/(p+q); il y a (p+q)² points de ce type
 - Ces points s'obtiennent par chaines en alternant inversion et isogonalité à partir d'un couple de départ
 - Pour p + q = 1, il n'y a que 4 droites et on retrouve le théorème de Kantor-Hervey généralisé (deltoïde pour p = 2 et q = -1 et autres H2n+1)
 - Pour p + q = 2, il y a 4 points, les premiers étant les centres des cercles inscrit et exinscrits et les suivants donnant 8 astroïdes pour p = 3 et q = -1
 - Pour p + q = 3, il y a 9 points et les premiers donnent 27 cardioïdes pour p = 2 et q = 1; on retrouve le théorème de Morley et la stelloïde cubique ...