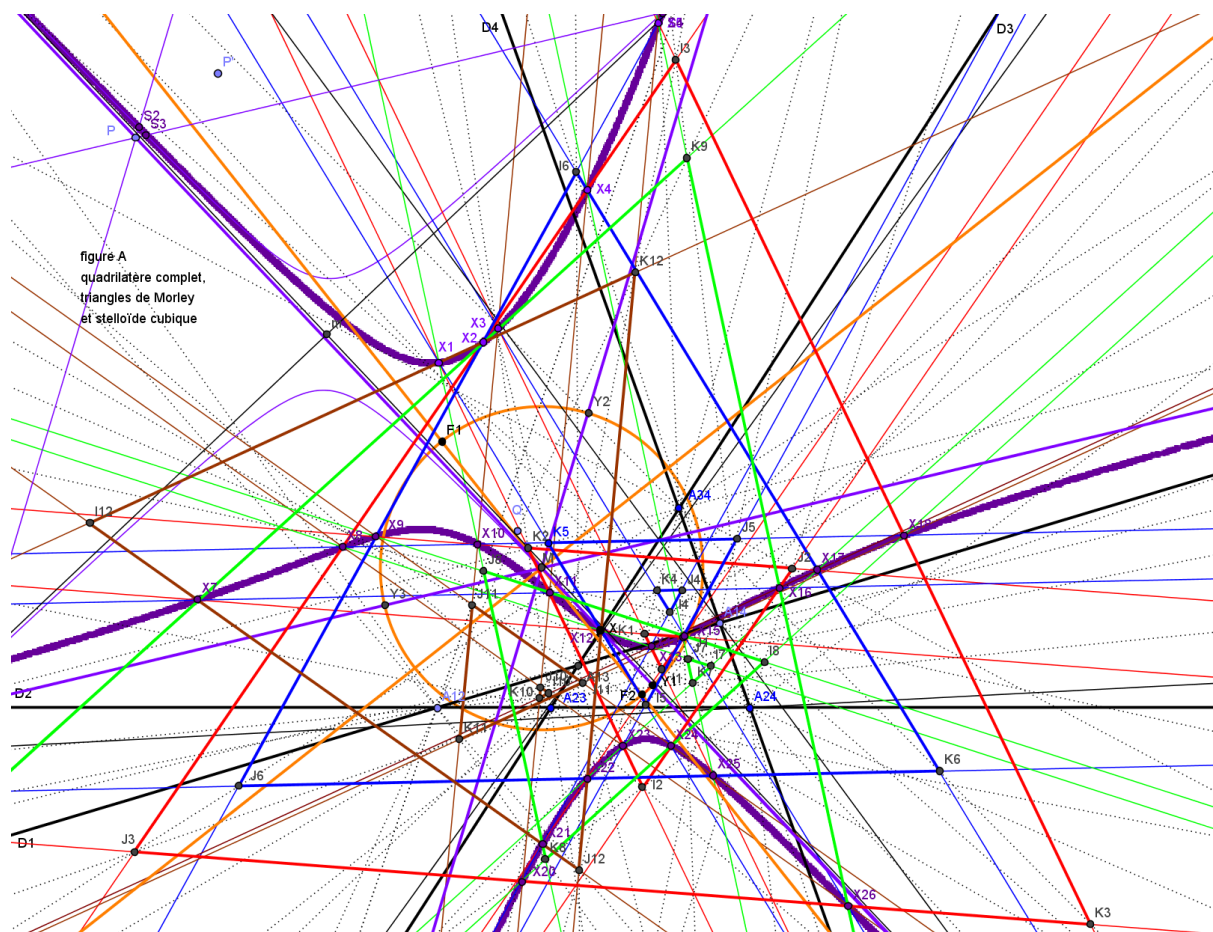


Le Buy (Dordogne 24), septembre 2014

Bernard Keizer
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique



Résumé

L'article est une prolongation d'un article paru fin 2013 (*) et présentant les principales propriétés du quadrilatère complet. Il passe en revue sans les démonstrations analytiques les éléments remarquables de cette figure : points (Miquel, Kantor-Hervey, Morley ...), droites (Newton, Steiner, Euler ...), cercles (Miquel, Hervey, Plücker, Dimidium ...) et courbes classiques (parabole, deltoïde de Kantor-Hervey et cardioïdes de Morley). Surtout, il décrit la cubique de Eckart Schmidt des 27 centres de cardioïdes ou stelloïde cubique de Jules Marchand, sa hessienne ou cubique circulaire focale de Van Rees et sa cayleyenne, ainsi que 2 autres cubiques associées. L'article utilise toujours autant que possible les notations de Encyclopedia of Quadrifigures de Chris van Tienhoven (**).

Abstract

The article is a follow up of an article published at the end of 2013 (*) and presenting the main properties of the complete quadrilateral. It reviews without the analytical proofs the remarkable elements of this figure : points (Miquel, Kantor-Hervey, Morley ...), lines (Newton, Steiner, Euler ...), circles (Miquel, Hervey, Plücker, Dimidium ...) and classical curves (parabola, Kantor-Hervey's deltoïd and Morley's cardioïds ...). Above all, it describes Eckart's cubic of the 27 centers of cardioïds or Jules Marchand's cubic stelloïd, it's hessian or Van Rees focal circular cubic and it's cayleyean as well as 2 other associated curves. The article uses always as much as possible the notations of Encyclopedia of Quadrifigures by Chris van Tienhoven (**).

Zusammenfassung

Der Artikel ist eine Verlängerung des Ende 2013 erschienen und die Haupteigenschaften des vollständigen Vierseits darstellenden Artikels (*). Er untersucht ohne die analytischen Beweise die merkwürdigen Elemente dieser Figur : Punkte (Miquel, Kantor-Hervey, Morley ...), Geraden (Newton, Steiner, Euler ...), Kreise (Miquel, Hervey, Plücker, Dimidium ...) und klassische Kurven (Parabel, Kantor-Hervey's Deltoïd und Morley's Kardioïden ...). Vor allem schildert sie Eckart's Kubik der 27 Kardioïde's Zentren oder Jules Marchand's kubische Stelloïde, ihre Hessesche Kurve oder Van Rees fokale zirkulare Kubik und ihre Cayleysche Kurve so wie 2 andere verbundenen Kurven. Der Artikel benutzt immer soviel wie möglich die Notierungen von Chris van Tienhoven's Encyclopedia of Quadrifigures (**).

(*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet <http://bernardkeizer.blogspot.fr>

(**) Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures www.chrisvantienhoven.nl

Sommaire

- Introduction

Première partie : définitions et propriétés du QC

- A) Définitions du QC
- B) Propriétés du QC (Jakob Steiner)
- C) Points de Kantor-Hervey et de Morley et orthocentre du QI des Oi
- D) Autres points et propriétés remarquables
- E) Transformations et constructions

Seconde partie : courbes classiques (parabole, deltoïde et cardioïdes)

- F) Parabole tangente aux 4 droites Di et parabole associée
- G) Deltoïde tangente aux 4 droites Di
- H) Monocardioïde tangente aux 4 cercles Ci
- I) Triangles de Morley et multicardioïdes tangentes aux 4 droites Di
- J) Quartique des points de Plücker généralisés

Troisième partie : stelloïde cubique, hessienne, cayleyenne et courbes associées

- K) Stelloïde cubique de J. Marchand
- L) Hessienne de Van Rees
- M) Cayleyenne
- N) Courbes associées
- Résumé et remarques
- Tableau des éléments remarquables
- Bibliographie

Figures

- Figure A Quadrilatère complet, triangles de Morley et stelloïde cubique
 - Figure B Points, droites et cercles du quadrilatère complet
 - Figure C Courbes classiques : paraboles, deltoïde et cardioïdes
 - Figure D Faisceau sygyzétique : stelloïde cubique, hessienne de Van Rees et hessiennes de 2 autres courbes ayant la même cayleyenne
-
- Figure 1 Quadrangle et triangle diagonal
 - Figure 2 Quadrilatère complet
 - Figure 3 Quadrilatère complet, triangle diagonal et perspectives
-
- Figure 4 Point et cercle de Miquel
 - Figure 5 Droites de Simson, de Steiner et de Newton
 - Figure 6 Centres des cercles inscrits et exinscrits
 - Figure 7 Intersections des bissectrices de 2 sommets opposés
-
- Figure 8 Droite d'Euler du QI des Oi
 - Figure 9 Points de Kantor-Hervey et de Morley
 - Figure 10 Points et cercle de Plücker
 - Figure 11 Droite d'Euler du QC
 - Figure 12 Cercles de Miquel et de Hervey et HypEq des Oi et des hi
 - Figure 13 Lieu des centres des coniques par les Oi (HypEq de centre G)
-
- Figure 14 Points D, point et cercle Dimidium
 - Figure 15 Point de Lemoine K
 - Figure 16 Droite d'Euler du triangle diagonal
 - Figure 17 Hyperbole équilatère du triangle diagonal
 - Figure 18 QC diagonal et 2nd triangle diagonal
 - Figure 19 Coniques, points S et cercle Dimidium
-
- Figure 20 Transformation Clawson-Schmidt
 - Figure 21 Transformations Clawson-Schmidt du QC et du QC diagonal
 - Figure 22 Droite QQ' et cercle de Plücker et autres droites et cercles conjugués
 - Figure 23 Transformation harmonique
 - Figure 24 Réciprocité polaire et cercle de Clawson
 - Figure 25 Construction de Chasles et trisection de l'angle

- Figure 26 Parabole tangente aux 4 droites D_i
 - Figure 27 Parabole associée et parabole du QC diagonal
 - Figure 28 Deltoïde tangente aux 4 droites D_i
 - Figure 29 Monocardioïde tangente aux 4 cercles C_i
 - Figure 30 Triangles de Morley et centres des 27 multicardioïdes tangentes aux 4 droites D_i
 - Figure 31 Trois cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i
 - Figure 32 Quartique des points de Plücker généralisés
-
- Figure 33 Stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet
 - Figure 34 Trois pivots de la stelloïde cubique
 - Figure 35 Conique polaire de la SC ou hyperbole équilatère
-
- Figure 36 Hessienne de Van Rees et conique polaire dégénérée de la SC
 - Figure 37 Triangle de pivots principal
 - Figure 38 Conique apolaire de la SC et inscrite dans le QC
-
- Figure 39 Stelloïde cubique, hessienne et cayleyenne
 - Figure 40 Points d'inflexion et d'intersection de la stelloïde cubique et de la hessienne et tangentes communes à la hessienne et à la cayleyenne
-
- Figure 41 Poles d'une droite passant par 2 points conjugués de la hessienne
 - Figure 42 Hessienne de van Rees et hessiennes de 2 autres courbes ayant la même cayleyenne que la stelloïde cubique

Ces figures ont été réalisées avec Géogébra version 4.2

Introduction

- Le premier article mentionné ci-dessus page 2 s'achevait sur la découverte par Eckart Schmidt de la cubique des 27 centres des cardioïdes inscrites dans le quadrilatère complet et sur les multiples correspondances entre les courbes décrites mettant en évidence des relations d'angles entre leurs axes et asymptotes. Il était clair que le quadrilatère complet n'avait pas encore révélé tous ses mystères.
- Le groupe de travail Quadrifigures a poursuivi ses recherches autour de Chris van Tienhoven, Eckart Schmidt et le spécialiste en matière de cubiques Bernard Gibert. Je tiens à les remercier tous les trois chaleureusement pour les échanges fructueux et les progrès considérables réalisés depuis un an.
- Bernard Gibert a consacré à la cubique de Eckart une étude très complète (*) et signalé qu'elle était en fait la stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet décrite par Jules Marchand dans un article resté assez confidentiel paru dans la revue Bulletin de la société vaudoise de sciences naturelles (Lausanne, Suisse) (**)
- J'ai pu me procurer cet article grâce à l'obligeance du service de documentation de l'Institut de géologie et poursuivre alors les réflexions entamées ; cet article a, depuis lors, été numérisé et est désormais disponible sur Internet.
- J'ai enfin découvert dans une brochure de l'APMEP (***) la construction de Chasles utilisée pour la trisection de l'angle, ce qui m'a permis de réaliser, toujours avec Géogebra, un grand nombre de figures illustratives des propriétés décrites (notamment axes de la deltoïde, triangles de Morley et asymptotes de la stelloïde cubique).
- Ce second article reprend rapidement les principales propriétés du quadrilatère complet et montre, en étudiant la stelloïde cubique et ses courbes dérivées, hessienne et cayleyenne, l'unité profonde de cette figure liée à la trisection de l'angle.

(*) Bernard Gibert 2013 Inscribed Cardioïds and Eckart Cubics

(**) Jules Marchand 1937 Géométrie du quadrilatère complet

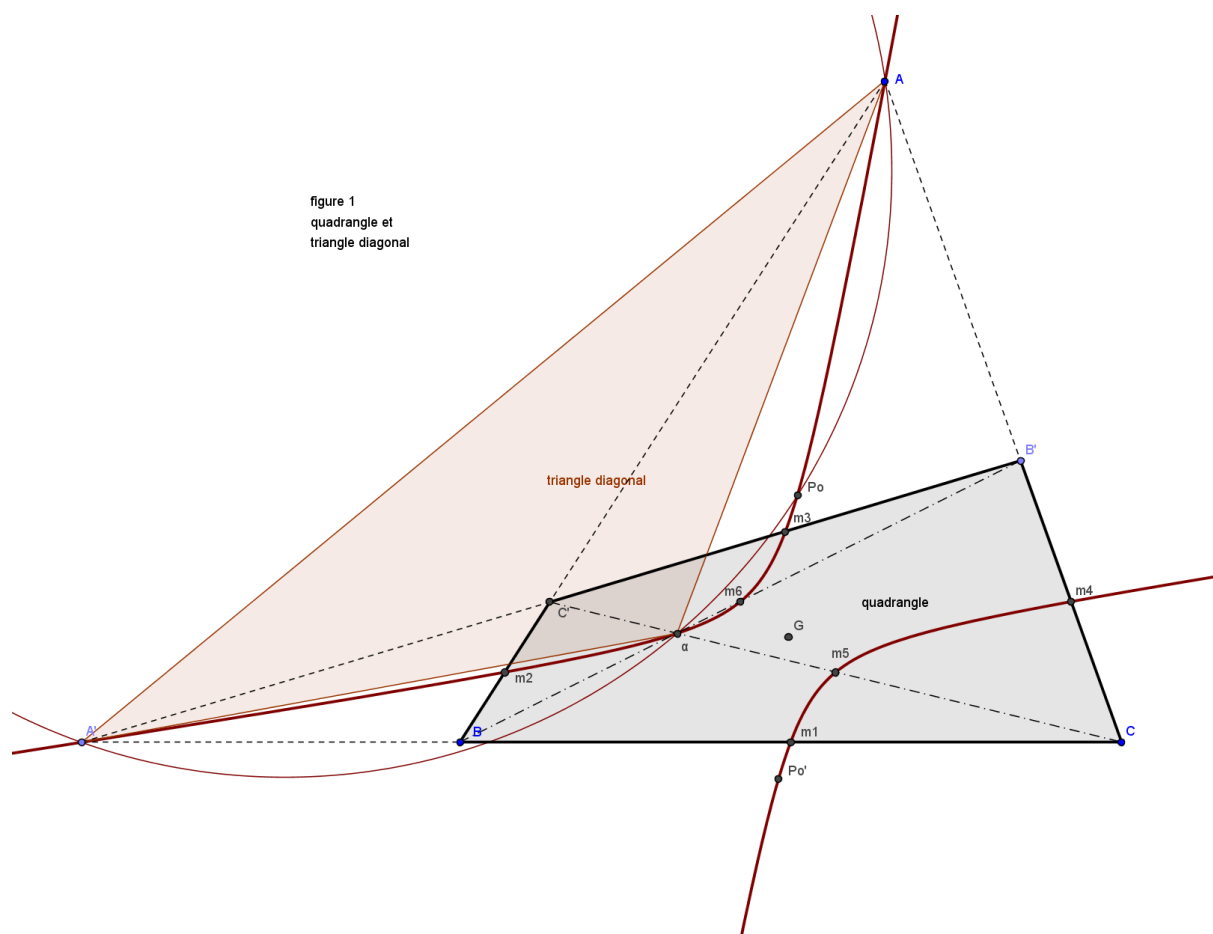
(***) Roger Cuppens Faire de la géométrie supérieure en jouant avec
Cabri-géomètre II Bulletins de l'APMEP n° 124 et 125

A) Définitions du Quadrilatère Complet

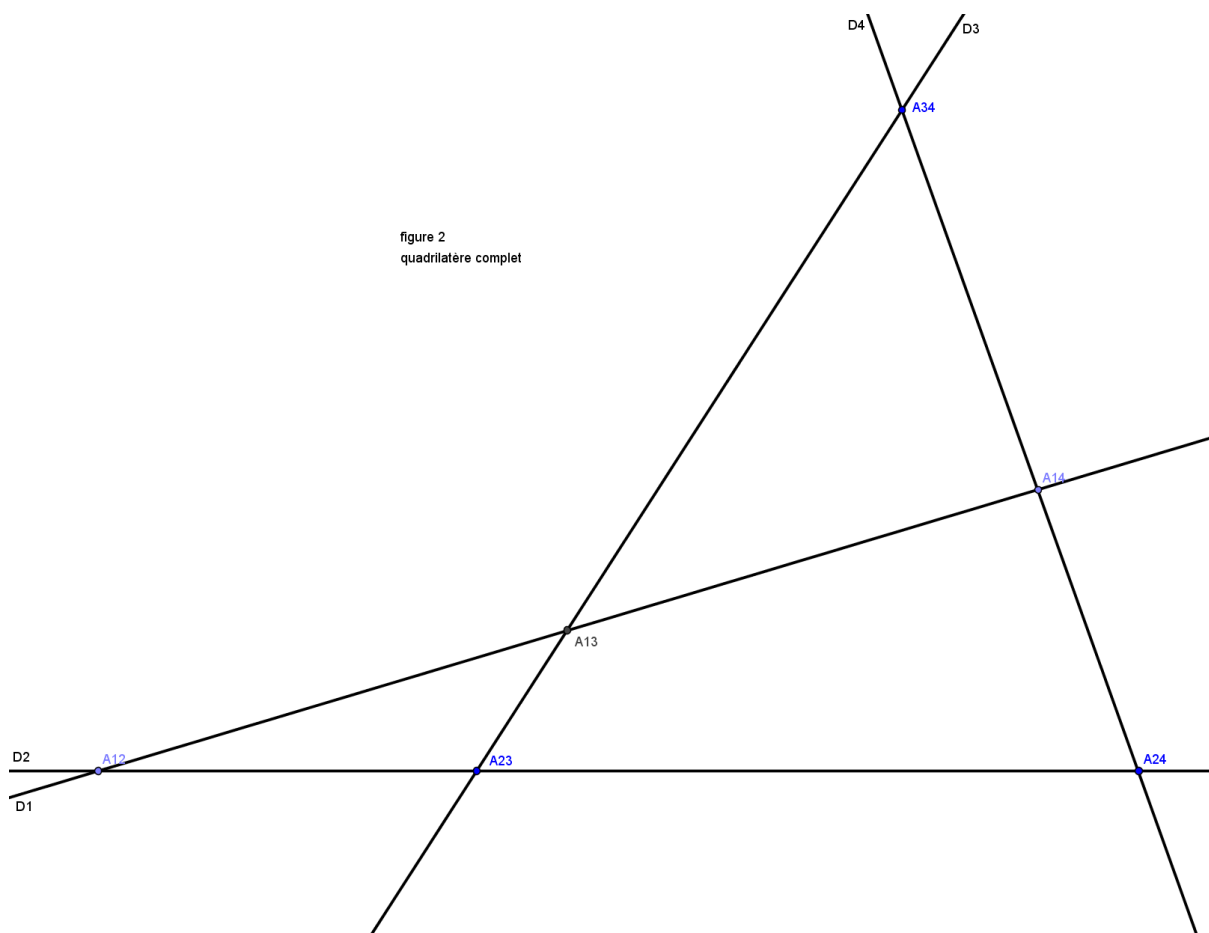
(figures 1, 2 et 3)

(cf C.A. van Tienhoven dans EQF)

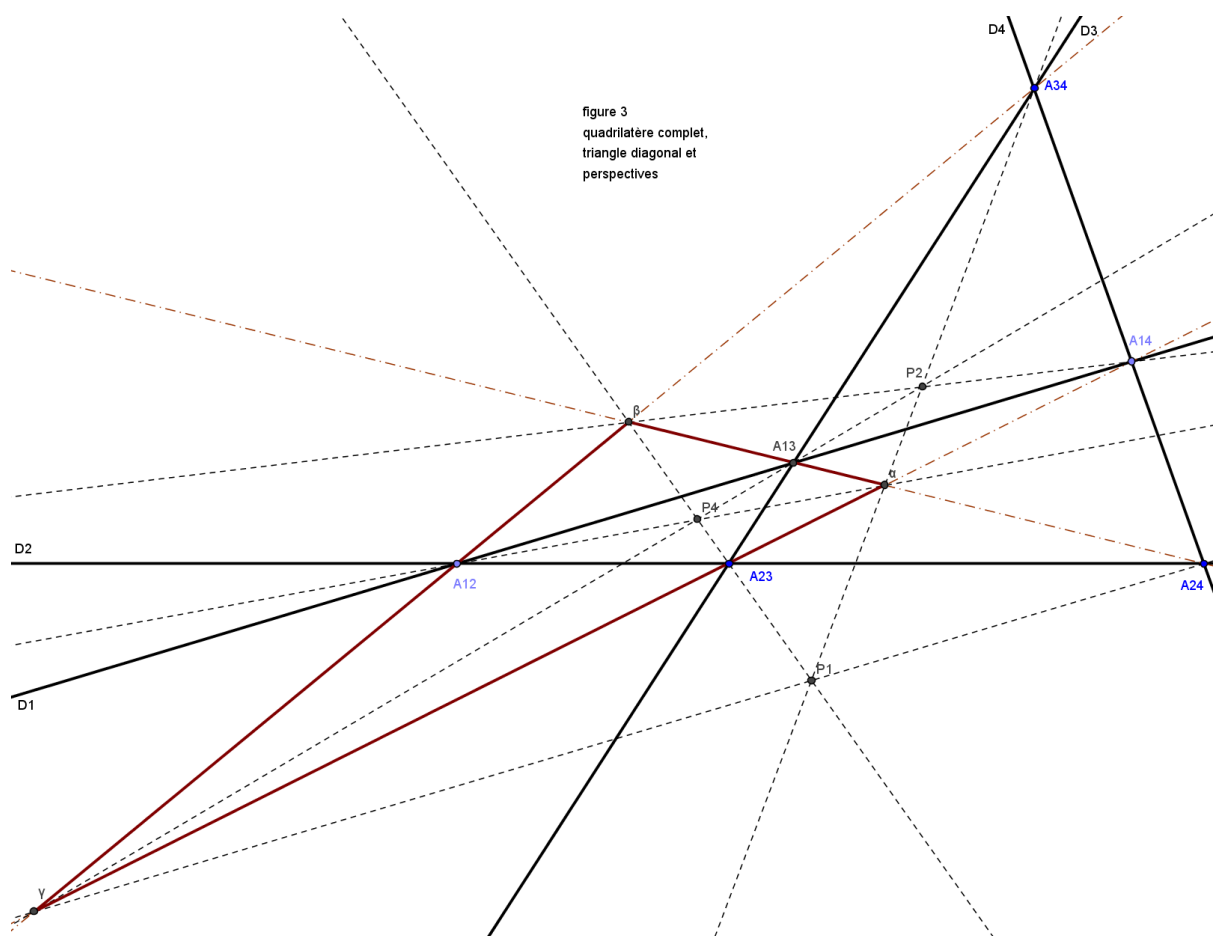
- Un quadrangle ou QA est déterminé par 4 points dans un ordre donné ; il a 4 côtés et 2 diagonales. Les intersections des 2 couples de côtés opposés et des 2 diagonales constituent le triangle diagonal du quadrangle.
- Le lieu des centres des coniques passant par les 4 points est la conique Γ des 9 points. Le centre g de la conique est le milieu commun des 3 segments joignant les milieux des 2 couples de côtés opposés et ceux des diagonales ; c'est le point QA-P1 de EQF et Γ est la conique QA-Co1 dans EQF.
- Cette conique passe par un certain nombre de points intéressants :
 - les 6 milieux des 4 côtés opposés et des 2 diagonales
 - les 3 sommets du triangle diagonal A, A' et α
 - le point P_o ou point d'Euler-Poncelet du QA : c'est le point d'intersection des 4 cercles d'Euler des 4 triangles formés par 3 points du QA. P_o est le point QA-P2 de EQF ; il est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal, cercle QA-Ci1 de EQF.
 - P_o est le centre de l'unique hyperbole équilatère passant par les 4 points ; c'est la conique QA-Co2 de EQF.
 - le point P_o' ou point de Gergonne-Steiner du QA ; c'est l'intersection des 4 cercles passant par les milieux des 3 segments joignant 1 sommet du QA aux 3 autres et le symétrique de P_o par rapport au centre g . P_o' est le point QA-P3 de EQF.



- Lorsque les 4 points sont cocycliques, le QA devient un QI et les points étudiés se simplifient ; le point de Gergonne-Steiner Po' est confondu avec le centre du cercle circonscrit aux 4 points et le point d'Euler-Poncelet est le symétrique de ce centre par rapport à l'isobarycentre des 4 points ou anticentre du QI et le symétrique du centre du cercle circonscrit par rapport à l'anticentre est l'orthocentre du QI.
- Lorsque les 4 points forment un ensemble tel que l'un des 4 est l'orthocentre du triangle formé par les 3 autres, le QA est dit orthocentrique ; les coniques passant par les 4 points sont des hyperboles équilatères, dont le centre est sur le cercle d'Euler des 4 triangles.
- Un quadrilatère complet ou QC est défini par 4 droites D_i ou par leurs 6 points d'intersection 2 à 2 A_{ij} , déterminant 12 côtés $A_{ij}A_{ik}$ et 3 diagonales $A_{ij}A_{kl}$. On note qu'un QC comprend 3 QA, dont les diagonales sont 2 des 3 diagonales du QC. Sur la figure 2, les 3 QA sont $A_{13}A_{14}A_{24}A_{23}$, $A_{23}A_{34}A_{14}A_{12}$ et $A_{13}A_{34}A_{24}A_{12}$.
- A l'inverse, on passe d'un QA à un QC en prolongeant les côtés tronqués du QA (d'où l'appellation de quadrilatère complet) ; ainsi, $A_{13}A_{23}$ et $A_{14}A_{24}$ se coupent en A_{34} et $A_{13}A_{14}$ et $A_{23}A_{24}$ en A_{12} . Comme il y a 3 manières de joindre 4 points 2 à 2, un ensemble de 4 points détermine 3 QC différents, chaque couple de points étant tour à tour côté ou diagonale ; le QC d'origine détermine 3 QA et chaque QA détermine à son tour 2 autres QC associés au premier. Au total, il y a donc 7 QC différents formés par 4 droites : D_1 , D_2 , D_3 et D_4 pour le QC d'origine et 2 des 4 droites avec 2 des 3 diagonales pour les 6 autres.



- Le QC est ainsi la figure duale du QA, les 4 points étant remplacés par 4 droites D_i .
- Le QC comprend 4 triangles de référence, chacun étant déterminé par 3 des 4 droites. On appelle T_i le triangle déterminé par les 3 droites D_j , D_k et D_l , C_i son cercle circonscrit, de centre O_i et de rayon R_i , G_i son centre de gravité, H_i son orthocentre et N_i le centre de son cercle d'Euler, de rayon $r_i = 1/2 R_i$.
- Le triangle diagonal du QC est déterminé par les 3 diagonales ; il est en perspective avec chacun des 4 triangles de référence, le centre de perspective ou dual de la droite D_i étant appelé P_i .
- Par chaque sommet du QC, il passe 2 côtés, une diagonale qui porte le sommet opposé du QC et 2 sommets du triangle diagonal et une droite passant par le 3^{ème} sommet du triangle diagonal qui porte 2 centres de perspective.
- Ces 4 droites forment un faisceau harmonique et toutes les divisions de segments sont harmoniques : ainsi, sur la figure 3, $A_{12}A_{34}$ est partagé harmoniquement par β et γ , $A_{34}\alpha$ est partagé harmoniquement par P_1 et P_2 et coupe $A_{23}A_{24}$ en un point conjugué harmonique de A_{12} par rapport à A_{23} et A_{24} .
- On appelle $\mu_{ij} = \mu_{kl}$ le milieu du segment $A_{ij}A_{kl}$.



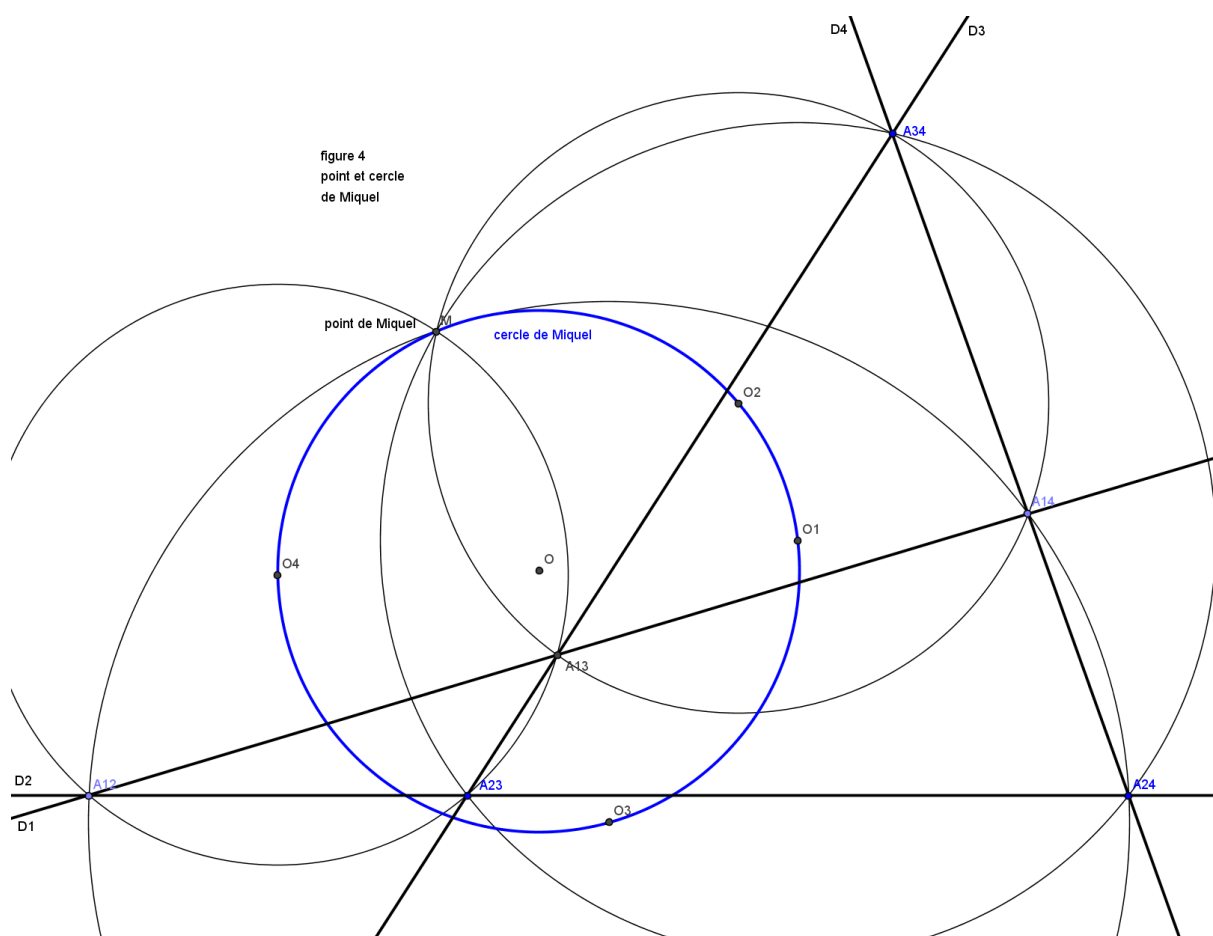
B) Propriétés du Quadrilatère Complet (Jakob Steiner)

(figures 4, 5, 6 et 7)

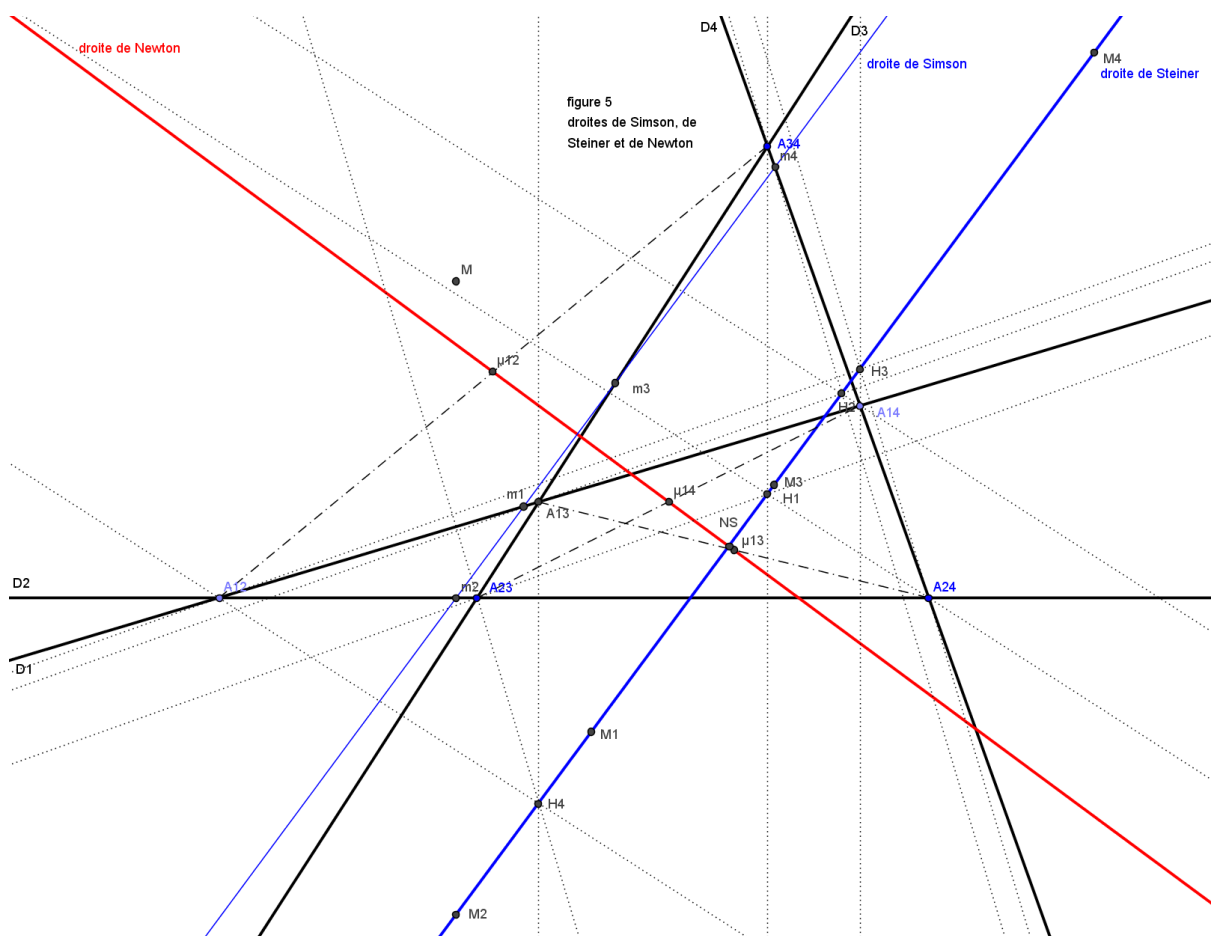
(cf J. Steiner (1), A. Miquel (3), A. Oppermann (12), J.W. Clawson (13), J.P. Ehrmann (23) et J.L. Aymé (28))

Le texte fondateur de Jakob Steiner (1) contient les 10 points suivants (St1 à St10) :

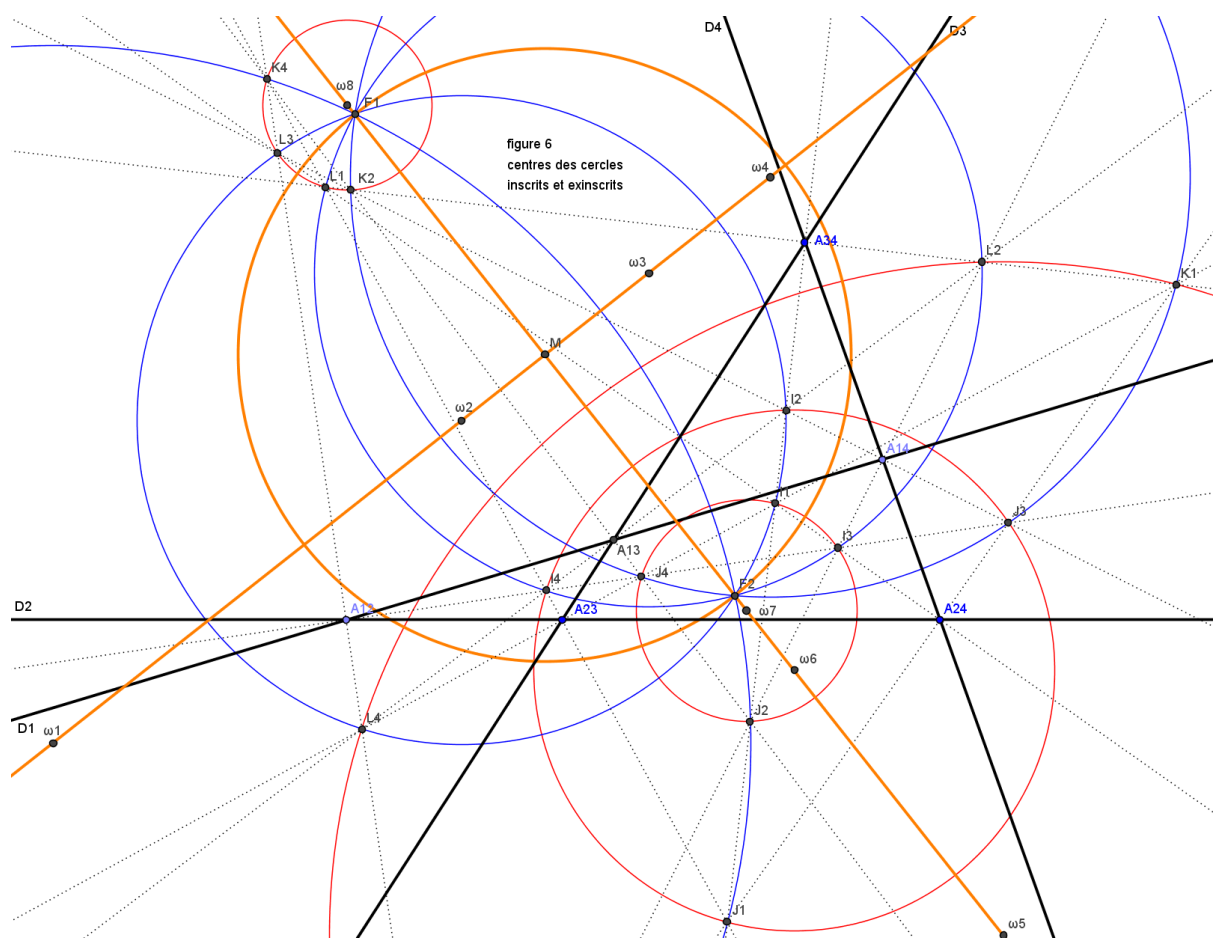
- Les 4 cercles C_i passent par un même point M , appelé point de Miquel (St1) ; M est le point QL-P1 de EQF.
(on démontre classiquement cette propriété en utilisant le théorème du pivot et la similitude des triangles $MA_{ik}A_{il}$ et $MA_{jk}A_{jl}$, qui laisse M invariant et transforme A_{ik} en A_{jk} et A_{il} en A_{jl} , D_i en D_j et C_i en C_j (3)).
- Les 4 points O_i et le point M appartiennent à un même cercle C de centre O , appelé point centrique du QC et de rayon $OM = r$, appelé cercle centrique ou de Miquel (St2). O est le point QL-P4 de EQF et C est le cercle QL-Ci3 de EQF.



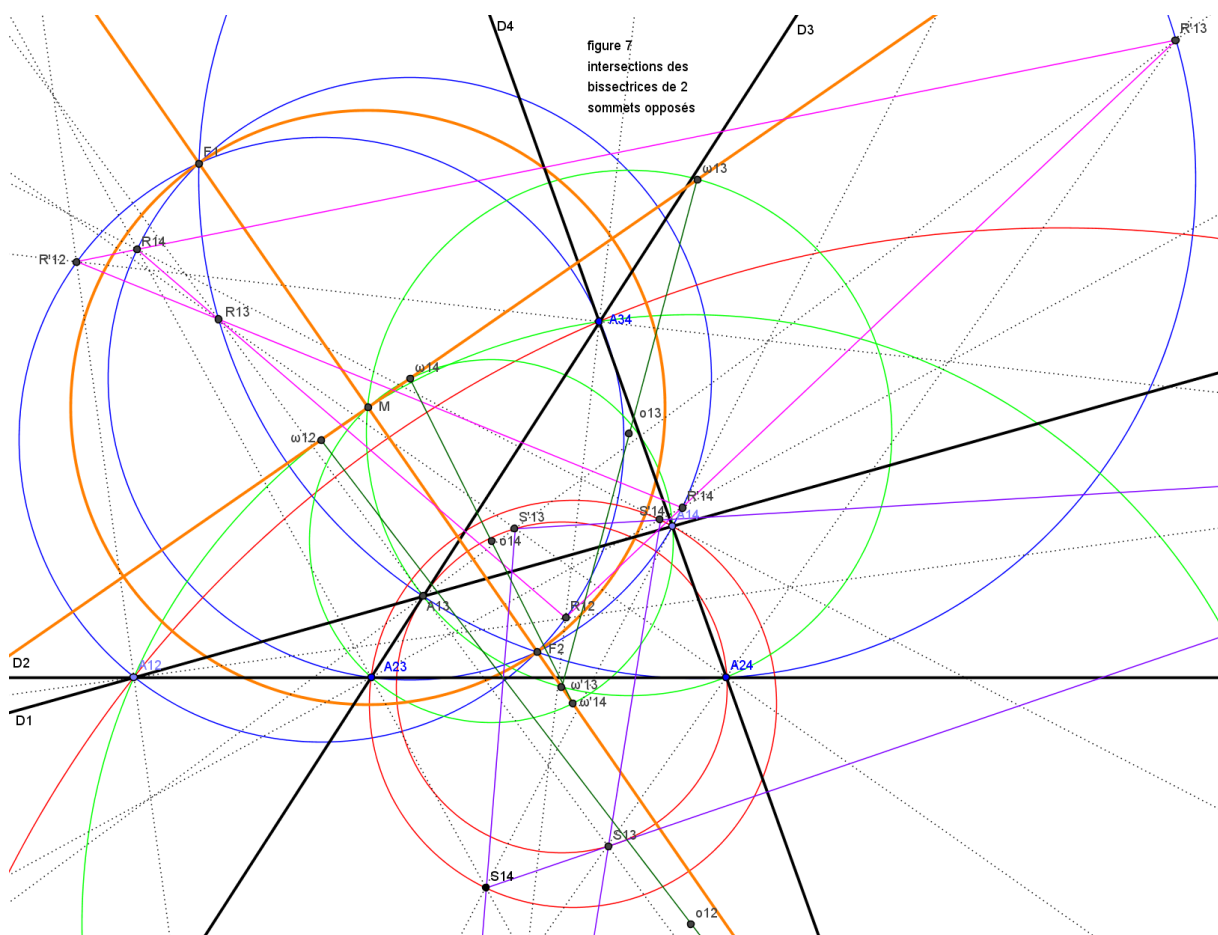
- Les projections orthogonales m_i de M sur les 4 droites D_i sont alignées sur la droite δ , droite de Simson de M par rapport aux 4 triangles T_i (St3).
- Les symétriques M_i de M par rapport aux points m_i (et par rapport aux droites D_i) et les orthocentres H_i sont alignés sur la droite Δ_h , droite de Steiner de M par rapport aux 4 triangles T_i et appelée droite de Steiner-Miquel du QC (St4).
- Les droites de Simson δ et de Steiner Δ_h sont parallèles et Δ_h se déduit de δ dans une homothétie de centre M et de rapport 2 (St5).
 δ et Δ_h sont les droites QL-L3 et QL-L2 de EQF.
- Les 3 milieux des diagonales μ_{ij} , μ_{ik} et μ_{il} sont alignés sur une droite Δ_n , appelée droite de Newton du QC (St6). Δ_n est la droite QL-L1 de EQF (33).
(J.L. Aymé a recensé, dans un petit ouvrage passionnant, une trentaine de manières d'établir cette propriété)
- La droite de Newton Δ_n est perpendiculaire aux droites δ et Δ_h (St7).
(on appelle point de Newton-Steiner le point d'intersection NS des droites de Newton et de Steiner ; c'est le point QL-P7 de EQF)



- Les bissectrices intérieures et extérieures des angles aux sommets A_{ij} sont au nombre de 12 ; elles déterminent 16 centres des cercles inscrits et exinscrits dans les triangles T_i , chaque point étant, par construction, à l'intersection de 3 droites. Ces points sont, 4 par 4, sur les 12 bissectrices et, toujours 4 par 4, sur 8 cercles, chaque point étant à l'intersection de 2 cercles (St8).
- Ces cercles forment 2 faisceaux orthogonaux de 4 cercles chacun et leurs centres sont sur 2 droites perpendiculaires, 4 sur l'une et 4 sur l'autre (St9).
Selon EQF, le barycentre des 8 centres est le point O, centre du cercle de Miquel.
- Ces 2 droites se coupent au point de Miquel M (St 10).
- On verra que ces 2 droites sont les bissectrices communes des angles $A_{ij}MA_{kl}$. Les points caractéristiques de ces 2 faisceaux (de base pour l'un, de Poncelet pour l'autre) sont les 2 points F1 et F2 invariants de la transformation Clawson-Schmidt (cf fin du point E) et intersections du cercle d'inversion avec une des bissectrices.
- Si l'on oriente les 4 droites D_i , il n'y a qu'un cercle tangent à chaque ensemble de 3 droites et seulement 4 points sur un cercle au lieu de 16 sur 8 cercles. Si l'on choisit, par exemple, l'orientation donnée aux D_i par la parabole (cf partie F), on a les points L1, K2, L3 et K4 sur le cercle de centre ω_8 ; si l'on retient l'orientation donnée aux D_i par la deltoïde (cf partie G), on a les points I1, J2, I3 et J4 sur le cercle de centre ω_7 .



- Les bissectrices intérieures et extérieures des angles en 2 sommets opposés A_{ij} et A_{kl} se coupent en 4 points R_{ij} et R'_{ij} et S_{ij} et S'_{ij} .
- R_{ij} et R'_{ij} sont sur un cercle passant par les sommets opposés A_{ij} et A_{kl} et par F_1 et F_2 .
- S_{ij} et S'_{ij} sont sur un cercle passant aussi par les sommets A_{ij} et A_{kl} et centré sur l'axe F_1F_2 (ainsi orthogonal au précédent).
- Ces 2 cercles, mentionnés par Jules Marchand, appartiennent aux 2 faisceaux de cercles décrits par Steiner.
- Les 4 points R_{ij} , R'_{ij} , S_{ij} et S'_{ij} constituent un quadrangle orthocentré ; le cercle d'Euler commun aux 4 triangles du QA passe par le point M.
- R_{ij} , R_{ik} et R_{il} sont alignés, ainsi que R'_{ij} , R'_{ik} et R'_{il} ; de même, S_{ij} , S_{ik} et S_{il} sont alignés, ainsi que S'_{ij} , S'_{ik} et S'_{il} . L'ensemble de ces alignements dessine une jolie toile d'araignée.

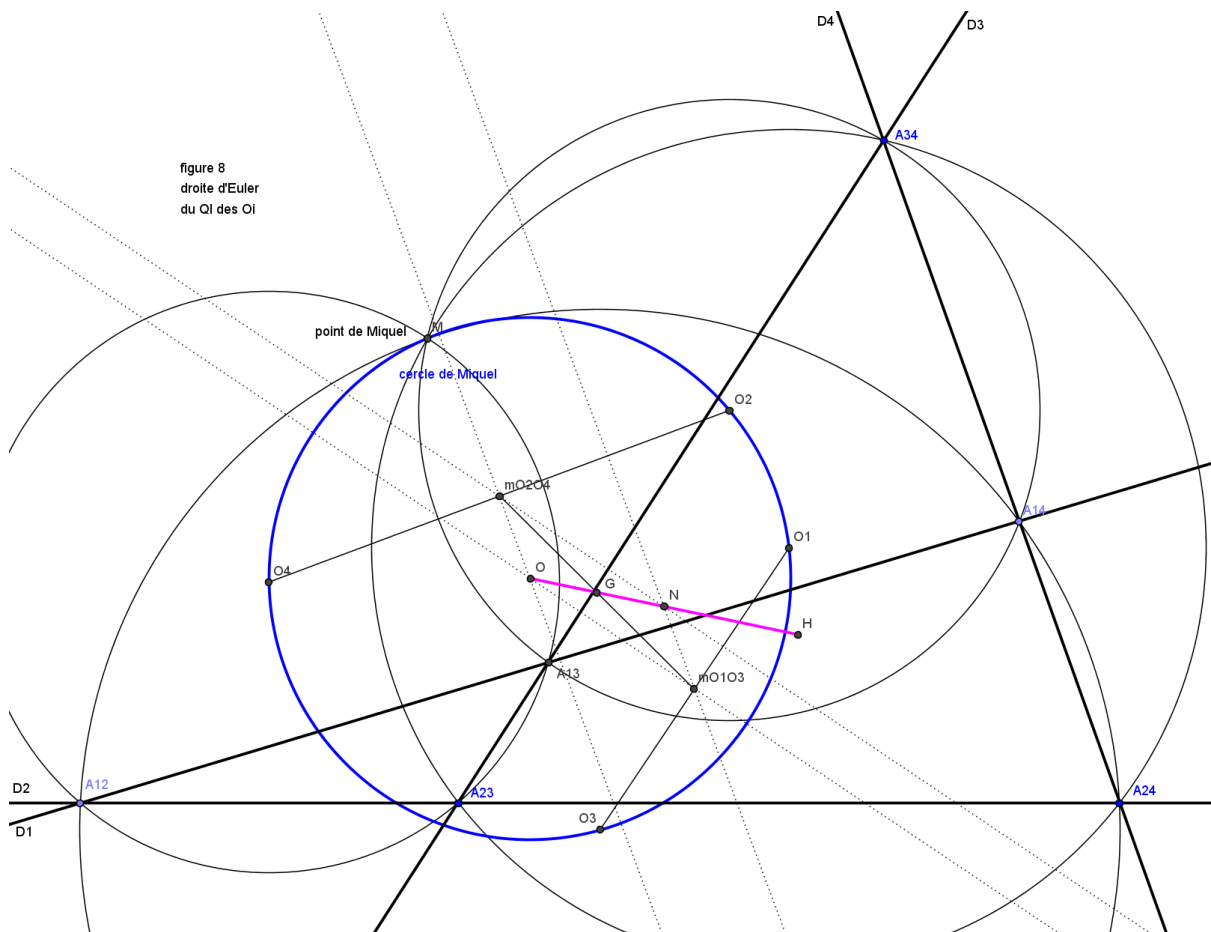


C) Points de Kantor-Hervey et de Morley et orthocentre du QI des O_i

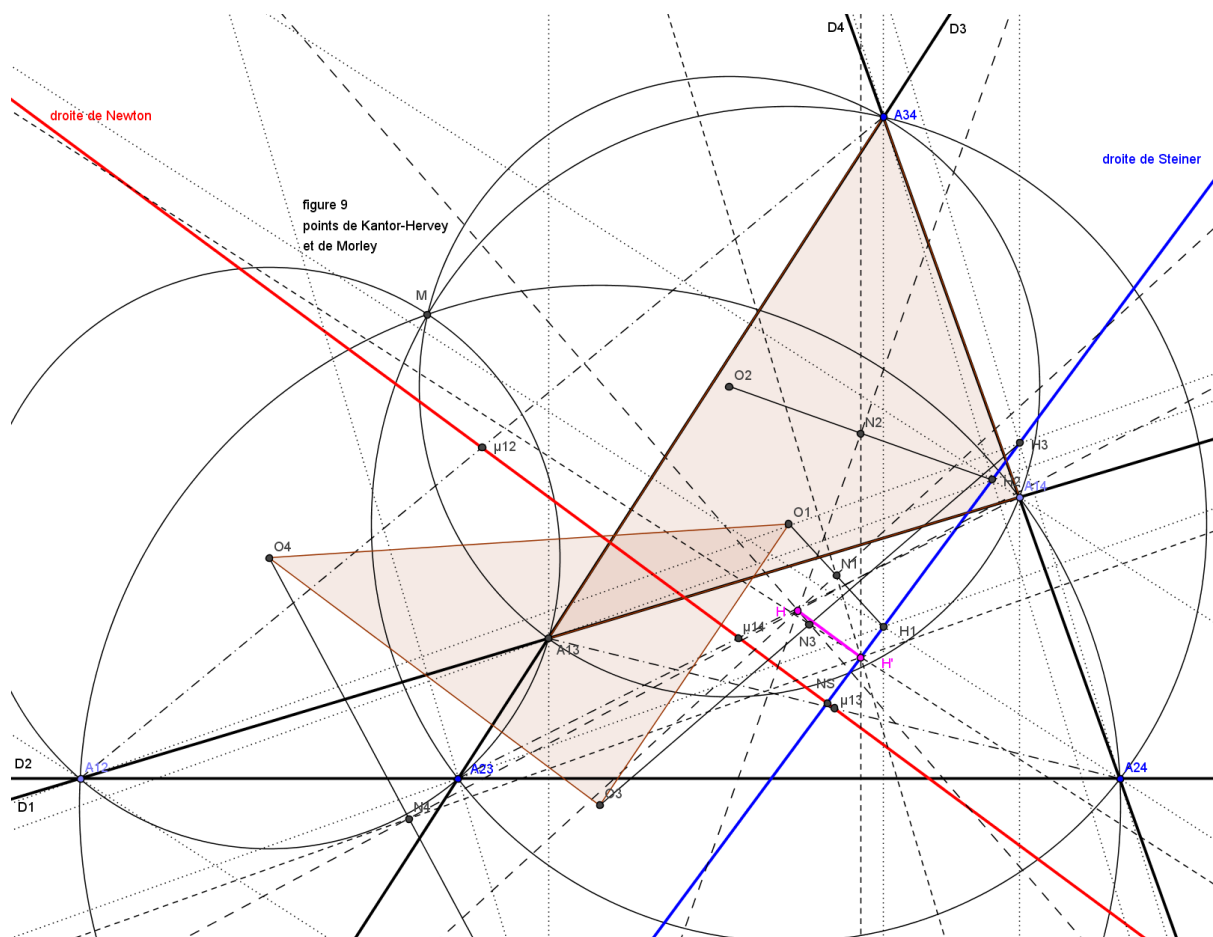
(figures 8, 9, 10, 11, 12 et 13)

(cf S. Kantor (5), F.R.J. Hervey (6), V. Thébault (17), H.E. Fettis (19), J.L. Aymé (28) et A. Levelut (29))

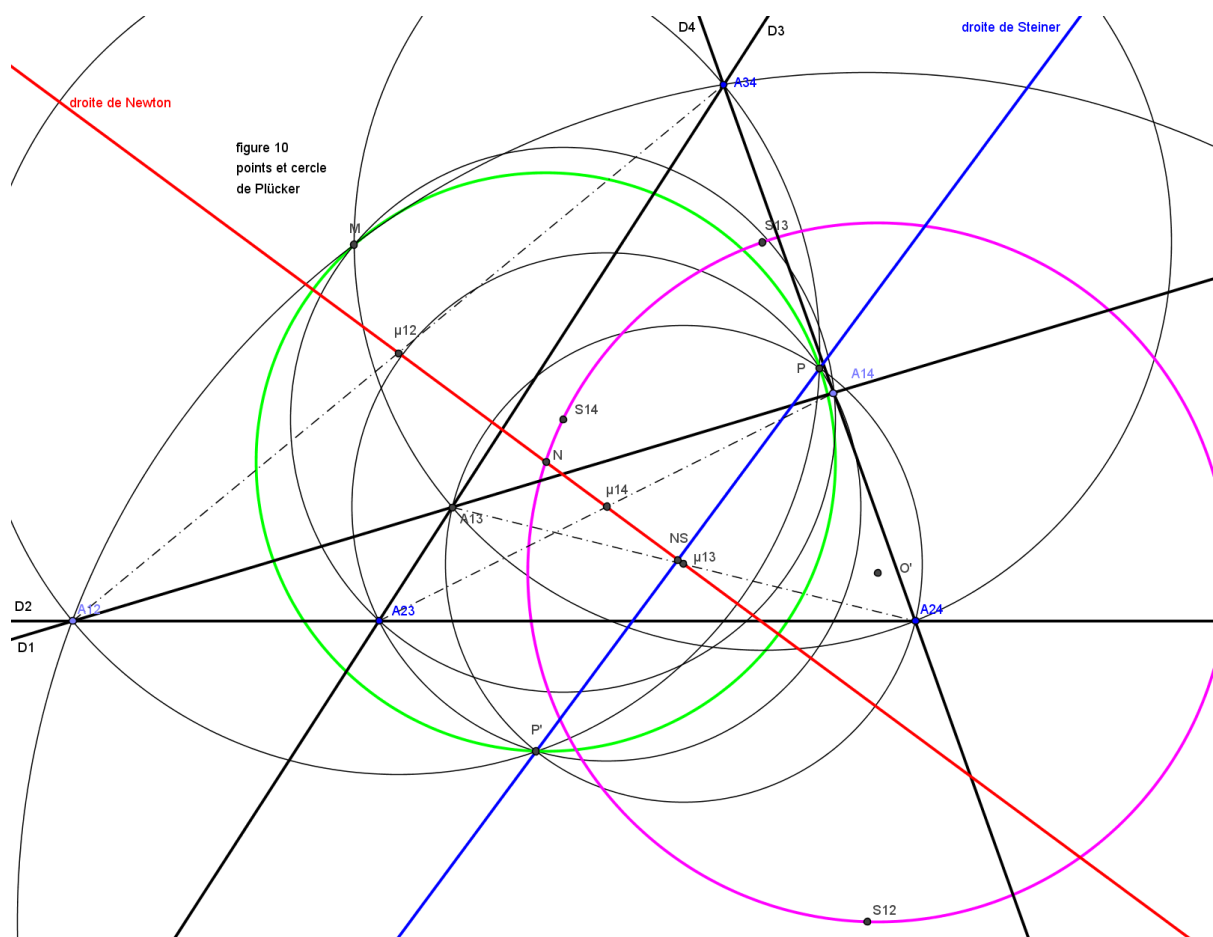
- On considère le QI formé par les 4 points O_i , centres des cercles circonscrits aux triangles de référence. On appelle G l'isobarycentre des O_i , N l'anticentre du QI et H son orthocentre ; on a $\mathbf{OH} = 2 \mathbf{ON} = 4 \mathbf{OG} = \sum \mathbf{OO}_i$. G , N et H sont appelés respectivement QL-P6, QL-P5 et QL-P3 dans EQF.
- OH est la droite d'Euler du QI formé par les O_i .
- G est le milieu des segments joignant les milieux de 2 côtés opposés ou de 2 diagonales.
- N est le point de concours des perpendiculaires à un côté ou une diagonale menées respectivement par le milieu du côté opposé ou de l'autre diagonale.
- On a défini les 4 triangles de référence T_i (cf page 10).
- On définit les 4 triangles t_i de sommets $O_j O_k O_l$; le centre de leur cercle circonscrit est O , leurs orthocentres h_i et leurs centres des cercles d'Euler n_i , milieux de $O h_i$.
- D_i est la droite de Steiner de M par rapport au triangle t_i ; elle passe par h_i .
- On a $\mathbf{O} h_i = \sum \mathbf{OO}_j$ avec $j \neq i$ et $\mathbf{O} h_i + \mathbf{OO}_i = 2 \mathbf{ON} = \mathbf{OH}$. N est le milieu de OH et des segments $O_i h_i$.
- On définit les 4 triangle t'_i de sommets $h_j h_k h_l$; le centre de leur cercle circonscrit est le point H , leurs orthocentres les 4 points O_i et leurs centres des cercles d'Euler les points n'_i , milieux des segments $H O_i$.



- Les 4 médiatrices des segments d'Euler O_iH_i concourent au point de Kantor-Hervey, qui est précisément le point H , orthocentre du QI des O_i .
(cette propriété, énoncée sans démonstration par Kantor et démontrée ensuite par Hervey, se démontre en utilisant la similitude S_i de centre M , de rapport $1/2\cos\theta_i$ et d'angle θ_i , où θ_i est l'angle orienté (Δ_h, D_i) défini $\text{mod } 2\pi$; elle transforme le triangle T_i dans le triangle t_i et la droite de Steiner du premier, Δ_h dans celle du second, D_i .)
- Les perpendiculaires aux droites D_i menées par les milieux N_i des segments d'Euler, centres des cercles d'Euler des triangles de référence, concourent au point H' appelé point de Morley ; c'est le point $QL-P2$ de EQF.
- Ce point H' est à la fois la projection orthogonale de H sur Δ_h et l'isobarycentre des orthocentres des triangles de référence H_i .

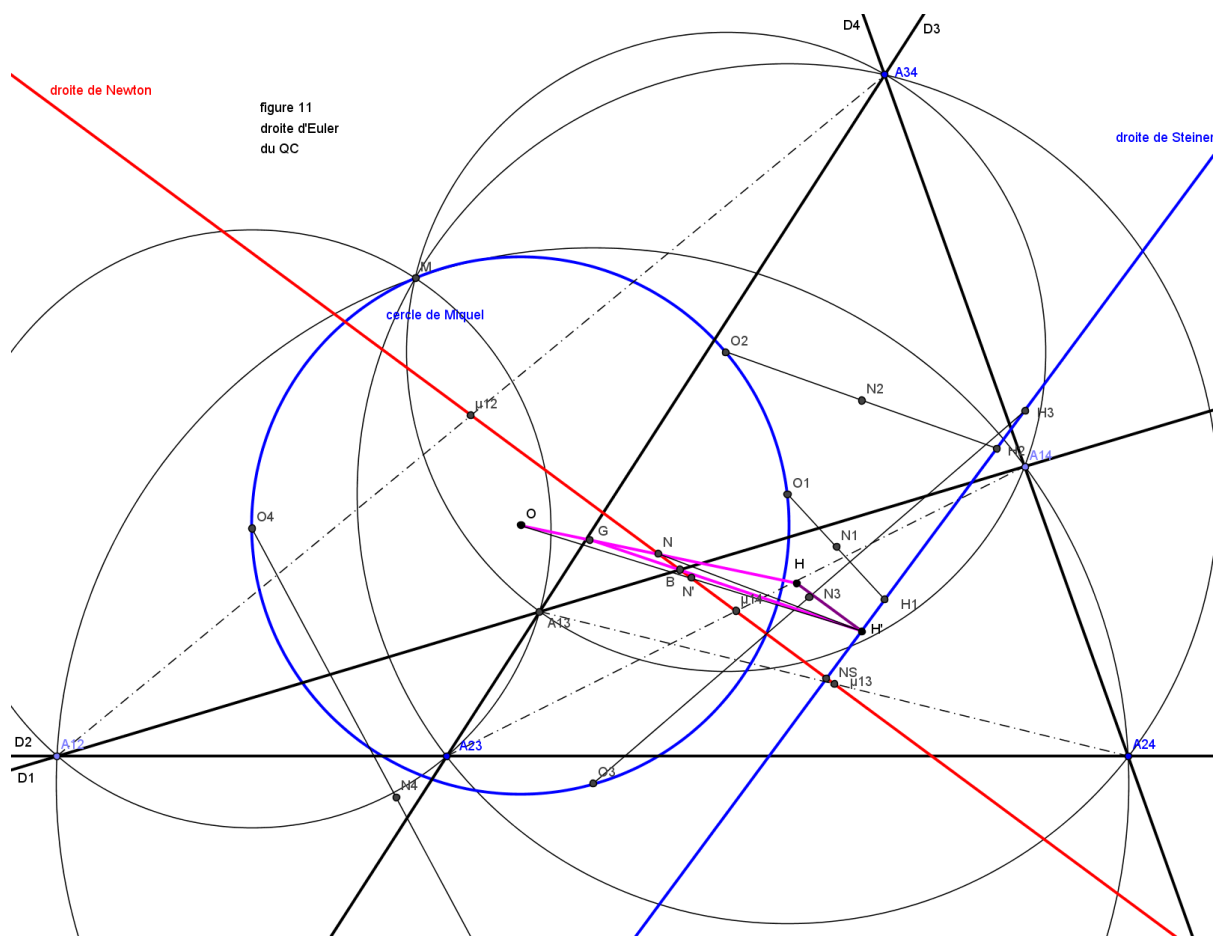


- Les 3 cercles ayant pour diamètres les segments joignant les 3 couples de points A_{ij} et A_{kl} se coupent en 2 points communs de Δh , P et P' , appelés points de Plücker. Ce sont les points QL-P1a et QL-P1b de EQF.
(la puissance de chacun des 4 points H_i par rapport aux 3 cercles est la même)
- Le cercle passant par M , P et P' est le cercle de Plücker ; c'est le cercle QL-Ci5 de EQF. Son centre est le point N , milieu de OH , et anticyentre du QI des O_i ; il se situe sur la droite de Newton.
- N est le centre du cercle d'Euler commun aux 2 QI formés par les O_i et les h_i , de rayon $r/2$, qui passe par les 8 centres des cercles d'Euler n_i et n'_i des triangles t_i et t'_i et il appartient à ces 8 cercles d'Euler. C'est par définition le point d'Euler-Poncelet des 2 QI formés l'un par les O_i et l'autre par les h_i . EQF lui donne le nom de centre de Clawson du QC, car J.W. Clawson est le premier à avoir démontré que N est sur la droite de Newton.
- Les points S_{ij} , centres des cercles passant par M et par 2 sommets opposés A_{ij} et A_{kl} sont sur un même cercle qui passe par le point N .

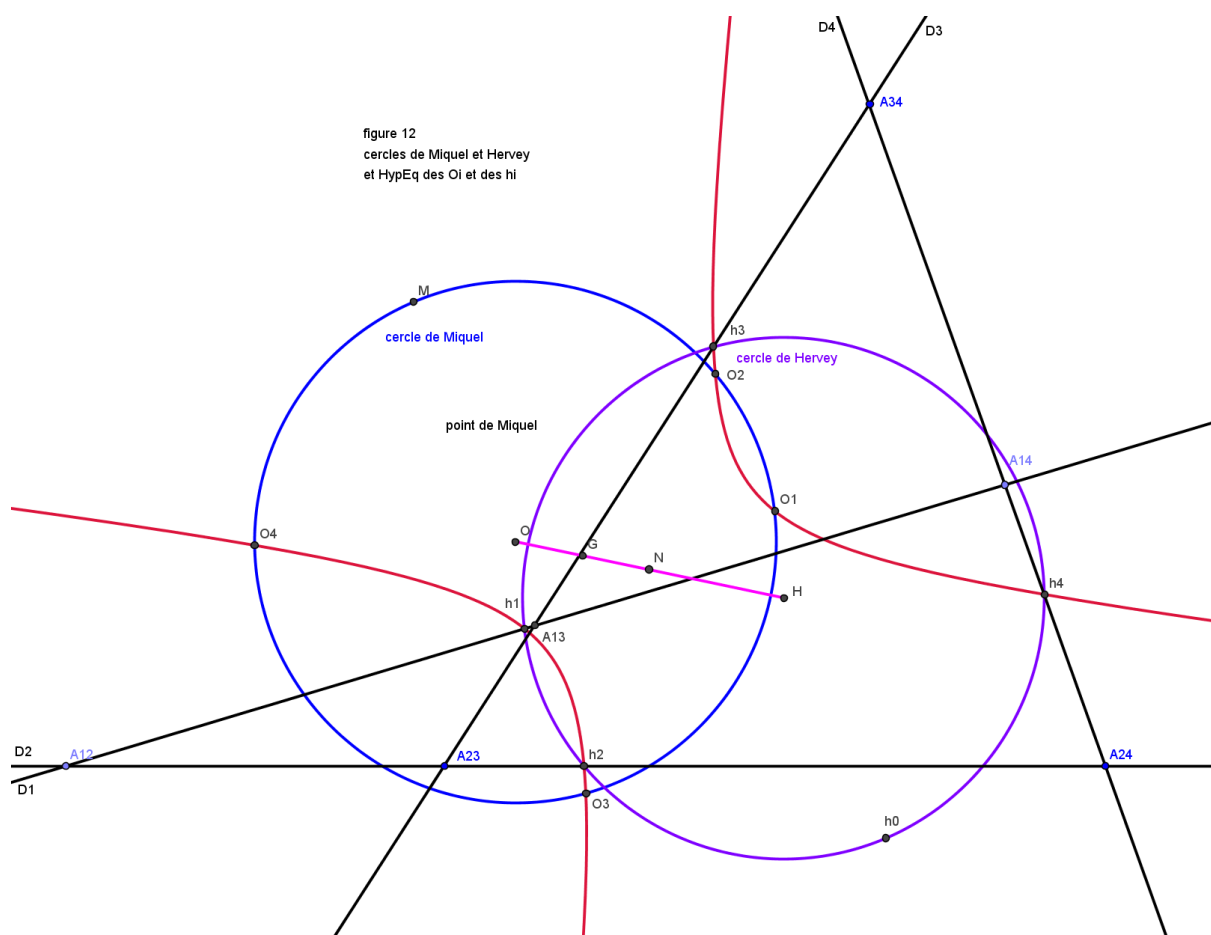


- L'isobarycentre B des 6 points A_{ij} est aussi celui des 3 milieux des diagonales ; il est donc sur la droite de Newton Δ_n . C'est aussi l'isobarycentre des 4 centres de gravité G_i des triangles de référence T_i . C'est le point QL-P12 de EQF.
- Les points G , B et H' étant respectivement les barycentres des centres des cercles circonscrits, des centres de gravité et des orthocentres des 4 triangles T_i sont alignés sur le segment d'Euler du QC GH' , B étant situé au $1/3$ à partir de G .
- On appelle N' le milieu de OH' ; il est situé sur la droite de Newton Δ_n . C'est le point QL-P22 de EQF.
- L'isobarycentre B des 6 sommets est le centre de gravité du triangle ONH' .

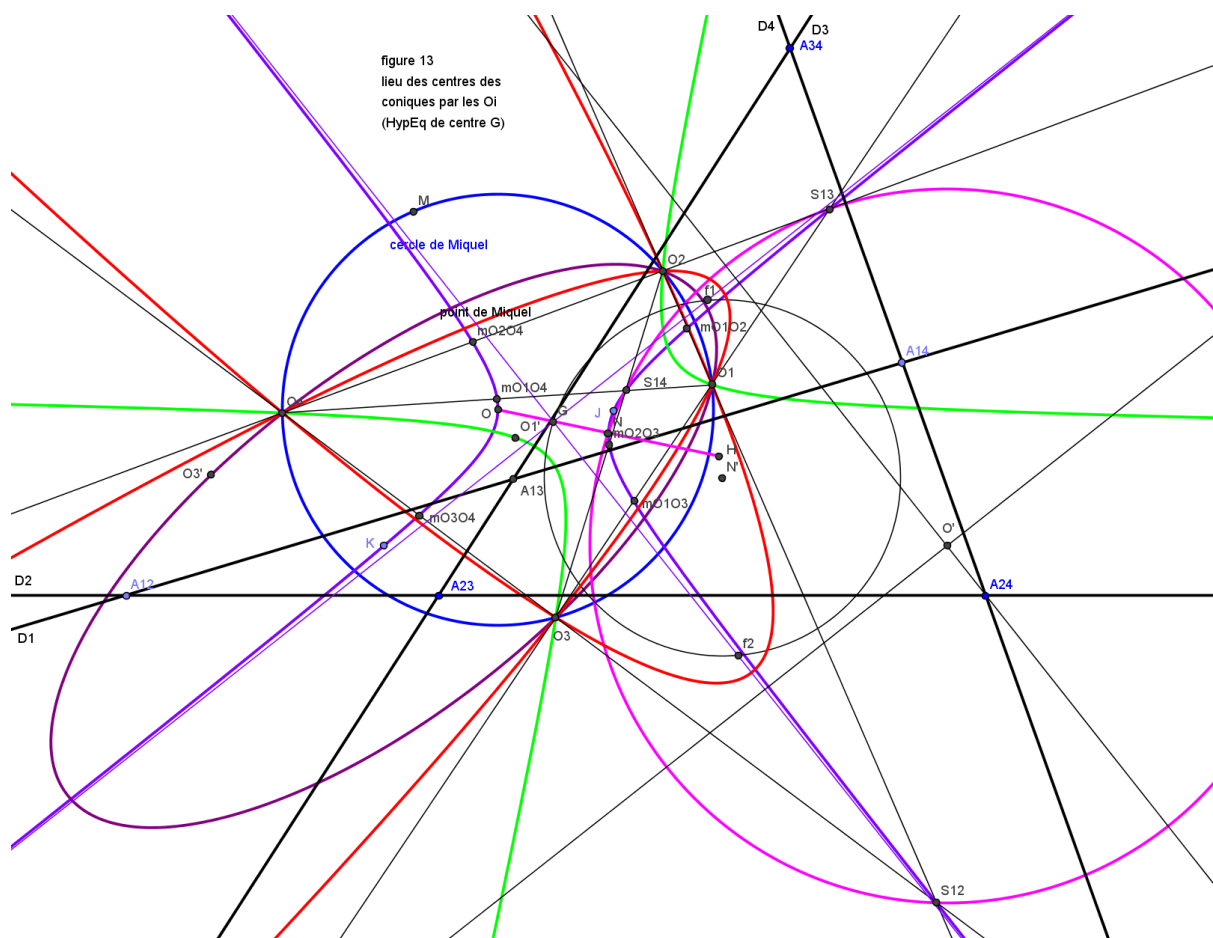
(ces propriétés se démontrent en considérant la transformation qui associe à un point du plan le milieu du segment joignant les symétriques par rapport à 2 droites concourantes ; cette transformation s'obtient par combinaison d'une homothétie ayant pour centre le point d'intersection des 2 droites et pour rapport le cosinus de l'angle qu'elles déterminent et d'une symétrie par rapport à la bissectrice de cet angle. En combinant les 4 points O_i 2 à 2, on obtient 3 couples de droites et 3 transformations ; les 4 points étant cocycliques, il se trouve que les 3 bissectrices obtenues sont parallèles. Les transformés du point de Miquel M dans les 3 transformations sont les milieux μ_{ij} , μ_{ik} et μ_{il} des 3 segments joignant les sommets opposés A_{ij} et A_{kl} et le transformé du point O dans chacune de ces 3 transformations est précisément le même point N .)



- Le cercle circonscrit aux triangles t_i est le cercle symétrique du cercle de Miquel dans une symétrie de centre N ; c'est le cercle de Hervey, appelé QL-Ci4 dans EQF.
- Les O_i et les h_i sont sur une hyperbole équilatère de centre N , ce point étant, comme on l'a vu, le point d'Euler-Poncelet du QI des O_i , symétrique de leur centre du cercle circonscrit O par rapport à leur isobarycentre G et celui du QI des h_i , symétrique de leur centre du cercle circonscrit H par rapport à leur isobarycentre G' , symétrique de G par rapport à N .
- Les triangles t_i sont symétriques des triangles t_i dans une symétrie de centre N ; ils sont inscrits dans les triangles T_i et leur sont inversement semblables. Ils sont directement semblables aux triangles médians des triangles T_i dans des similitudes s_i de centres O_i , de rapport $1/\cos\theta_i$ et d'angle θ_i .
- Le cercle circonscrit à t_i est le cercle podaire de O_i et de son conjugué isogonal H_i et le centre de ce cercle est sur la médiatrice de O_iH_i ; il se déduit de N_i , milieu de O_iH_i , dans la similitude s_i et l'on retrouve le point H de Kantor-Hervey et le théorème des 4 médiatrices des segments d'Euler (cf Lalesco Géométrie du triangle).



- Les points O_i étant cocycliques, le lieu des centres des coniques passant par ces 4 points est une hyperbole équilatère de centre l'isobarycentre G des 4 points. Elle passe par les 6 milieux des côtés ou des diagonales du QI des 4 points et par les sommets de son triangle diagonal (conique des 9 points).
- Les sommets de ce triangle diagonal sont précisément les 3 points S_{ij} déjà rencontrés.
- La conique passe par O (le cercle circonscrit étant une conique particulière passant par les 4 points) et par H (l'hyperbole équilatère décrite figure 12 en étant une autre).
- Le cercle circonscrit aux 3 sommets du triangle diagonal S_{ij} passe, comme on l'a vu, par le point N , point d'Euler-Poncelet du QI des O_i .
- Sur la figure 13, on a fait figurer 2 paraboles (en rouge), le cercle de Miquel de centre O (en bleu), une hyperbole de centre J (en vert) et une ellipse de centre K (en violet) ainsi que l'hyperbole équilatère de centre N (en vert) ; les points O , J , K et N sont sur l'hyperbole équilatère de centre G , milieu de ON (en mauve).

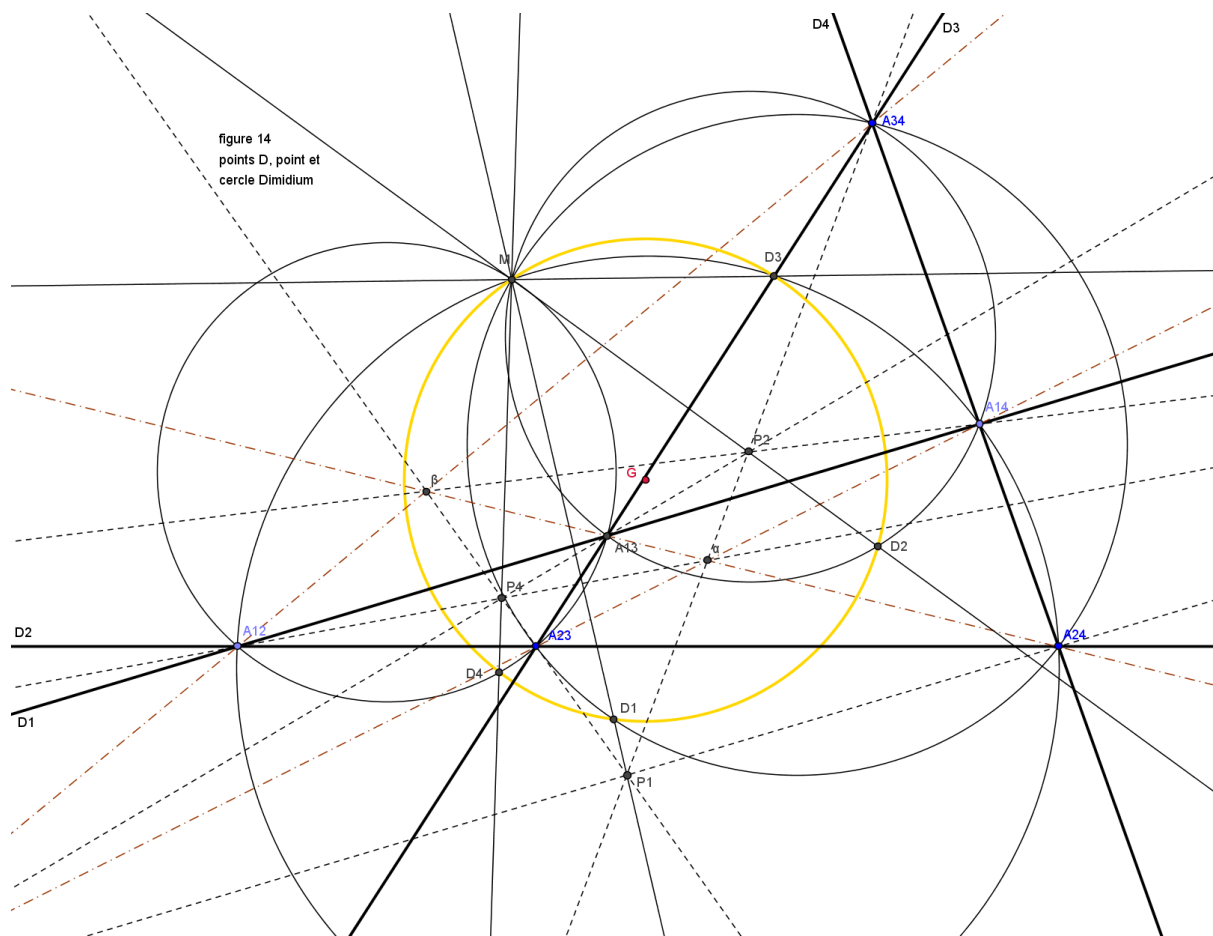


D) Autres points et propriétés remarquables

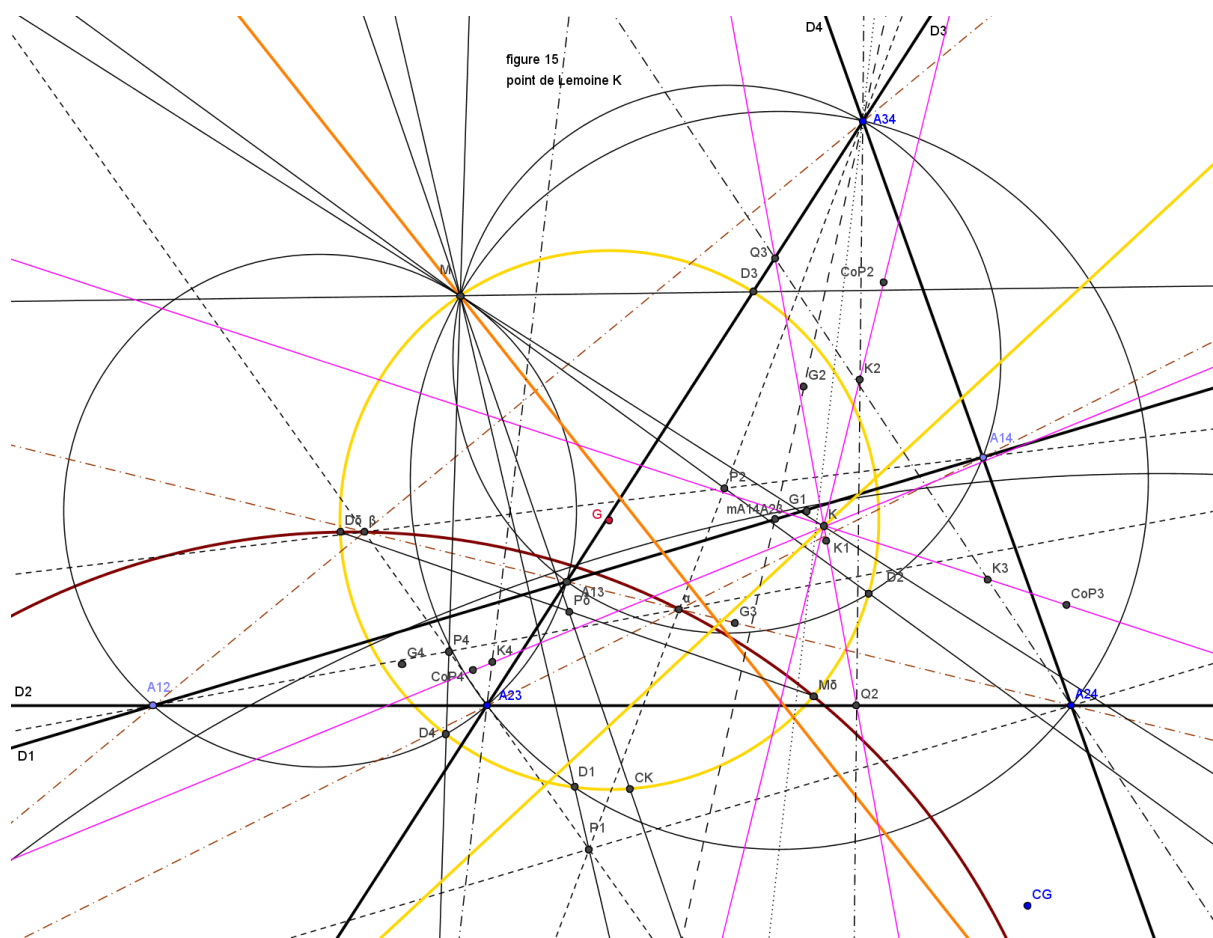
(figures 14, 15, 16, 17, 18 et 19)

(cf L. Ripert (8), A. Oppermann (12), J.W. Clawson (13), J.P. Ehrmann (23) et C.A. van Tienhoven dans EQF)

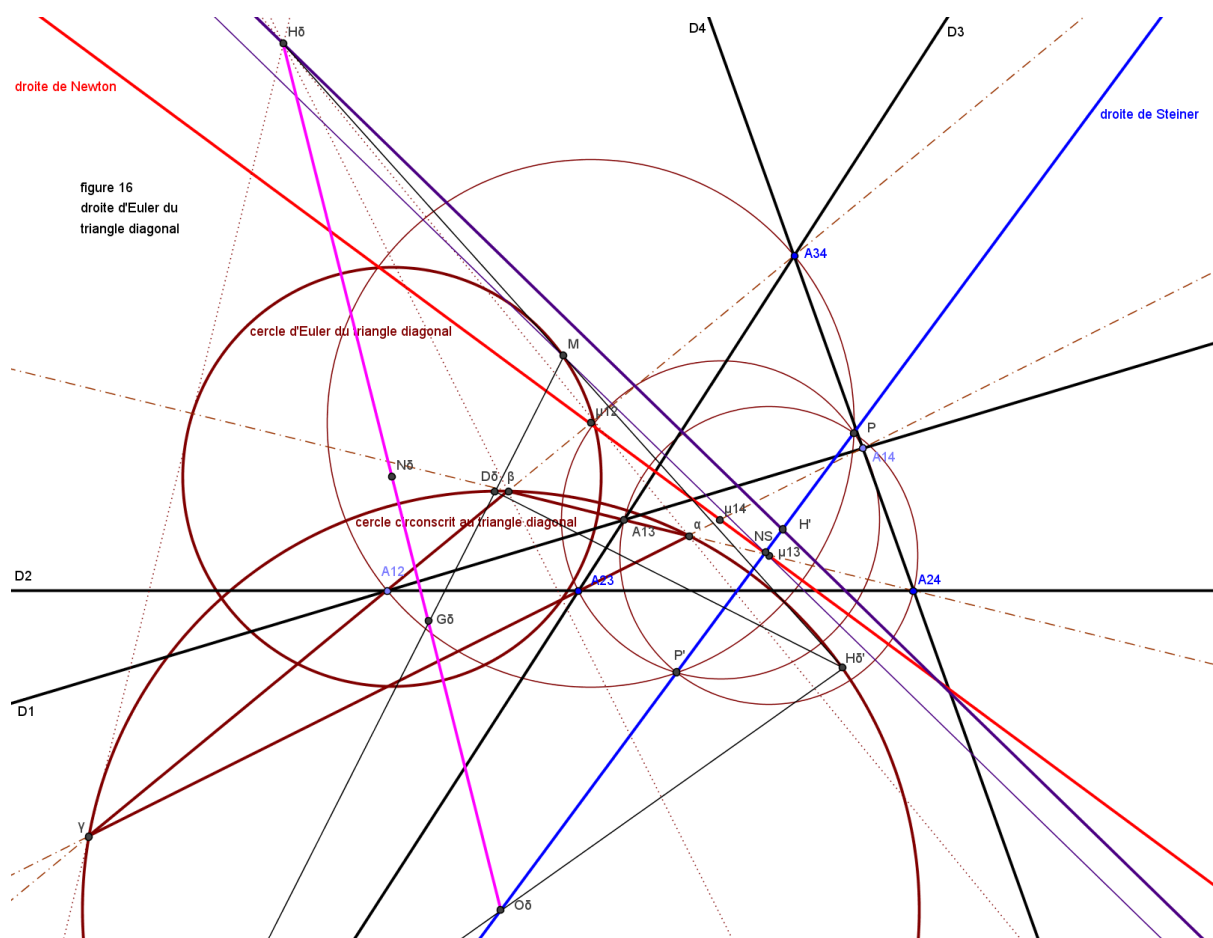
- Sur chacun des 4 cercles C_i circonscrits aux triangles de référence T_i , on appelle D_i la seconde intersection de la droite passant par M et le centre de perspective P_i .
- Les 4 points D_i sont sur un cercle appelé cercle intermédiaire ou Dimidium ; c'est le cercle QL-Ci6 de EQF.
- Ce cercle a pour centre le point G appelé point intermédiaire ou Dimidium et passe par le point de Miquel M .
- L'appellation de intermédiaire ou Dimidium pour le point G et le cercle de centre G passant par M est justifiée par le fait que G est le milieu de ON et que ce cercle est donc situé entre le cercle de Miquel de centre O et le cercle de Plücker de centre N , ces 2 cercles passant aussi par M .
- On verra plus loin que cette construction est la même pour le triangle diagonal et que le cercle Dimidium coupe le cercle circonscrit à ce triangle en 2 points $M\delta$ et $D\delta$; ce sont les points QL-P17 et QL-P24 de EQF.



- On reprend ici la construction donnée par Léon Ripert (8).
- Pour chacun des triangles de référence T_i , on définit le point de Lemoine K_i , conjugué isogonal du centre de gravité G_i ($K_i = \text{Co}G_i$) ; ce point minimise la somme des carrés des distances aux 3 côtés d'un triangle.
- On appelle par ailleurs $\text{Co}P_i$ le conjugué isogonal du centre de perspective P_i entre le triangle de référence T_i et le triangle diagonal.
- On considère le triangle de référence T_i formé par les 3 droites D_j , D_k et D_l et les intersections, appelées Q_j , Q_k et Q_l , avec chacune de ces 3 droites de la symédiane (symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice) issue du sommet opposé dans le triangle formé par les 3 autres droites (D_i , D_k et D_l pour D_j). Ainsi, sur la figure 15, $A_{34}K_2$ coupe D_2 en Q_2 , $A_{24}K_3$ coupe D_3 en Q_3 et $A_{23}K_4$ coupe D_4 en Q_4 .
- Les 3 points Q_j , Q_k et Q_l sont alignés sur une droite qui passe par K_i et $\text{Co}P_i$. Sur la figure 15, Q_2 , Q_3 et Q_4 sont alignés sur la droite $K_1\text{Co}P_1$.
- Les 4 droites ainsi déterminées concourent en un point K ; ce point, noté QL-P26 dans EQF, minimise la somme des carrés des distances aux 4 droites D_i du QC et est de ce fait appelé par Léon Ripert point de Lemoine du QC.



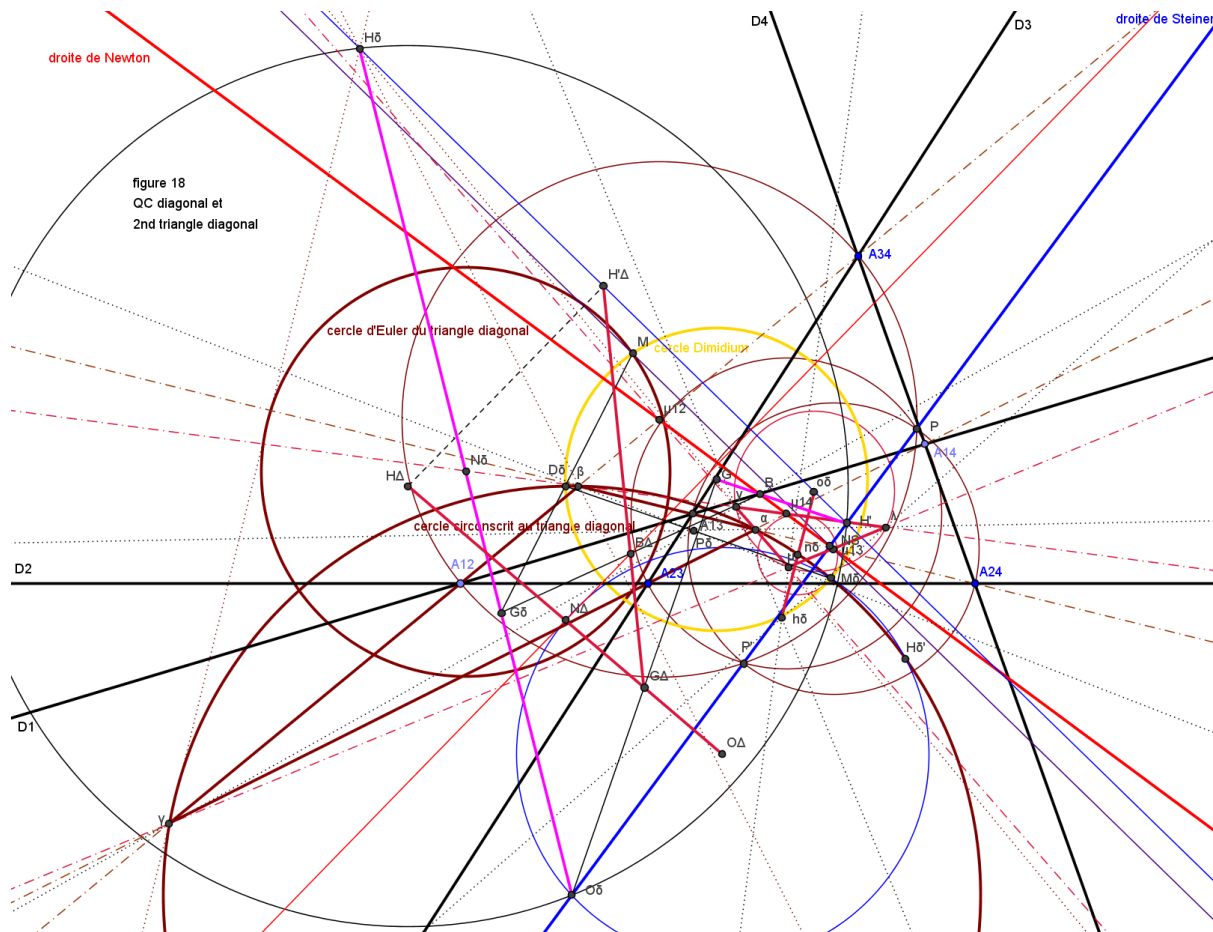
- On a vu que le triangle diagonal $\alpha\beta\gamma$ est formé par les 3 diagonales ; son segment d'Euler comprend le centre du cercle circonscrit $O\delta$, l'orthocentre $H\delta$, le centre de gravité $G\delta$ et le centre de son cercle d'Euler $N\delta$. Ce sont respectivement les points QL-P9, QL-P10, QL-P8 et QL-P11 de EQF.
- Le cercle circonscrit au triangle diagonal est orthogonal aux 3 cercles ayant pour diamètres les points A_{ij} et A_{kl} ; c'est le cercle QL-Ci1 de EQF.
- Le centre $O\delta$ du cercle circonscrit est situé sur la droite de Steiner Δh , axe radical des 3 cercles et perpendiculaire à la droite de Newton Δn , ligne des centres.
- Le cercle d'Euler du triangle diagonal passe par le point M ; c'est le cercle QL-Ci2 de EQF.
- Du coup, le symétrique $H'\delta$ de $H\delta$ par rapport à M est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal ; c'est le point QL-P16 de EQF.
- L'anticomplément $H''\delta$ de M (on a $G\delta H''\delta = -2 G\delta M$) est pour la même raison le point diamétralement opposé à $H'\delta$ sur le cercle circonscrit au triangle diagonal.
- Le 2nd point d'intersection de $MG\delta$ avec le cercle circonscrit au triangle diagonal est un point $D\delta$, appelé QL-P24 dans EQF ; $MG\delta$ est perpendiculaire à $H\delta D\delta$.



- Les sommets α , β et γ du triangle diagonal forment avec l'orthocentre $H\delta$ un QA orthocentrique ; les 4 points sont les points de base d'un faisceau d'hyperboles équilatères, le lieu des centres étant le cercle d'Euler commun aux 4 triangles du QA.
- Ce cercle passe, comme on l'a vu, par le point de Miquel M.
- L'hyperbole équilatère du faisceau ayant pour centre le point M passe par le symétrique $H'\delta$ de $H\delta$ par rapport à M ; elle passe surtout par les points F1 et F2 déjà rencontrés (cf page 13).
- On peut déterminer ses asymptotes de 2 manières en utilisant les propriétés connues de l'hyperbole équilatère :
 - Les 2 segments découpés par une droite quelconque sur l'hyperbole et sur les 2 asymptotes ont même milieu (propriété générale d'une hyperbole) ; les asymptotes étant perpendiculaires, il suffit de tracer le cercle ayant pour centre le milieu d'un segment quelconque joignant 2 points de l'hyperbole équilatère à son centre M, il recoupe le segment en 2 points sur les asymptotes.
 - Surtout, l'hyperbole équilatère est une stelloïde conique ; si l'on prend 2 points quelconques P1 et P2 symétriques par rapport au centre M comme pivots (par exemple F1 et F2 ou $H\delta$ et $H'\delta$), pour tout point X de la courbe, les bissectrices de l'angle $P1XP2$ sont parallèles aux asymptotes.



- Un QC est déterminé par 4 droites, çàd un triangle de référence et une 4^{ème} droite, appelée ménélienne de ce triangle. On appelle QC diagonal le QC formé par le triangle diagonal et par la droite de Newton du QC, prise comme ménélienne.
- Le point de Miquel du QC diagonal, appelé $M\delta$, est sur le cercle circonscrit au triangle diagonal, de centre $O\delta$, et sur le cercle d'Euler du second triangle diagonal (on l'identifie aisément comme le point QL-P17 de EQF).
- Le barycentre des 6 points du QC diagonal, appelé B_Δ est par construction le milieu du segment joignant le barycentre des 3 milieux des diagonales, çàd le barycentre B des 6 points du QC, et le centre de gravité du triangle diagonal $G\delta$.
- La droite de Steiner du QC diagonal est la droite $\Delta_{H\Delta}$ passant par $H\delta$ et H' ; c'est la droite QL-L6 de EQF. La parabole de foyer $M\Delta$ et de directrice $\Delta_{H\Delta}$ est tangente aux 3 diagonales et à la droite de Newton du QC.
- Le point de Morley H'_Δ du QC diagonal est le milieu de $H\delta H'$; la droite de Steiner du QC diagonal porte les 2 points de Morley des 2 QC.
- Le point de Kantor-Hervey H_Δ du QC diagonal est le centre du cercle circonscrit au triangle $H'O\delta H\delta$ (il est sur la médiatrice de $O\delta H\delta$ et se projette en H'_Δ sur $H'H\delta$).
- La connaissance des points B_Δ et H'_Δ permet de compléter la droite d'Euler du QC diagonal et fournit le point G_Δ ; c'est le milieu du segment $GO\delta$.
- La connaissance de G_Δ et H_Δ permet de compléter la droite d'Euler du QI et fournit les points O_Δ , centre du cercle circonscrit à $O\delta$, $M\delta$ et $H'\delta$, et N_Δ .
- Les droites joignant les sommets $\alpha\beta\gamma$ du triangle diagonal aux milieux des diagonales forment un second triangle diagonal $\lambda\mu\nu$, en perspective à la fois avec chacun des triangles T_i et avec le premier triangle diagonal. Le centre de perspective $P\delta$ entre les 2 triangles diagonaux est le point QL-P13 de EQF.



- Pour un triangle de référence T_i , on considère la conique Γ_i , conjuguée isogonale de la droite $KiCoPi$ déjà rencontrée dans la construction du point K (cf page 22).
- Cette conique Γ_i passe par les 3 sommets du triangle, par son centre de gravité et par les points P_i et D_i définis précédemment (cf pages 9 et 21).
- Pour le triangle diagonal, on considère de même la conique Γ_δ qui passe par les 3 sommets du triangle, par son centre de gravité G_δ et par les points P_δ et D_δ définis précédemment (cf pages 23 et 24).
- Les 4 coniques Γ_i se coupent 2 à 2 en 4 points, l'un étant un sommet du QC et les 3 autres étant 3 points S_1, S_2 et S_3 du cercle Dimidium.
- La conique Γ_δ passe aussi par les 3 S-points.
- Pour chacun des 3 QA formés par 4 des 6 sommets du QC situés aux extrémités de 2 diagonales, on considère la conique Γ'_j des 9 points, lieu des centres des coniques passant par ces 4 points ; Γ'_j passe par les 6 milieux des segments joignant les 4 points (dont les 2 milieux des 2 diagonales) et par les 3 sommets de son triangle diagonal (dont 2 sommets du QC et un sommet de son triangle diagonal).
- Les 3 coniques Γ'_j passent aussi par les 3 points S .
- Enfin, on définit la conique Γ''_δ qui passe par les 3 sommets λ, μ et ν du second triangle diagonal et par les 5 centres de perspective P_δ et P_i .
- Cette conique Γ''_δ passe aussi par les 3 points S .
- La parabole tangente aux 4 droites D_i (cf partie G page 36) est tangente aux côtés du triangle $S_1S_2S_3$ (source EQF) et Eckart Schmidt a montré que le segment d'Euler de ce triangle est celui du QC, G étant le centre du cercle circonscrit, B le centre de gravité et H' l'orthocentre.

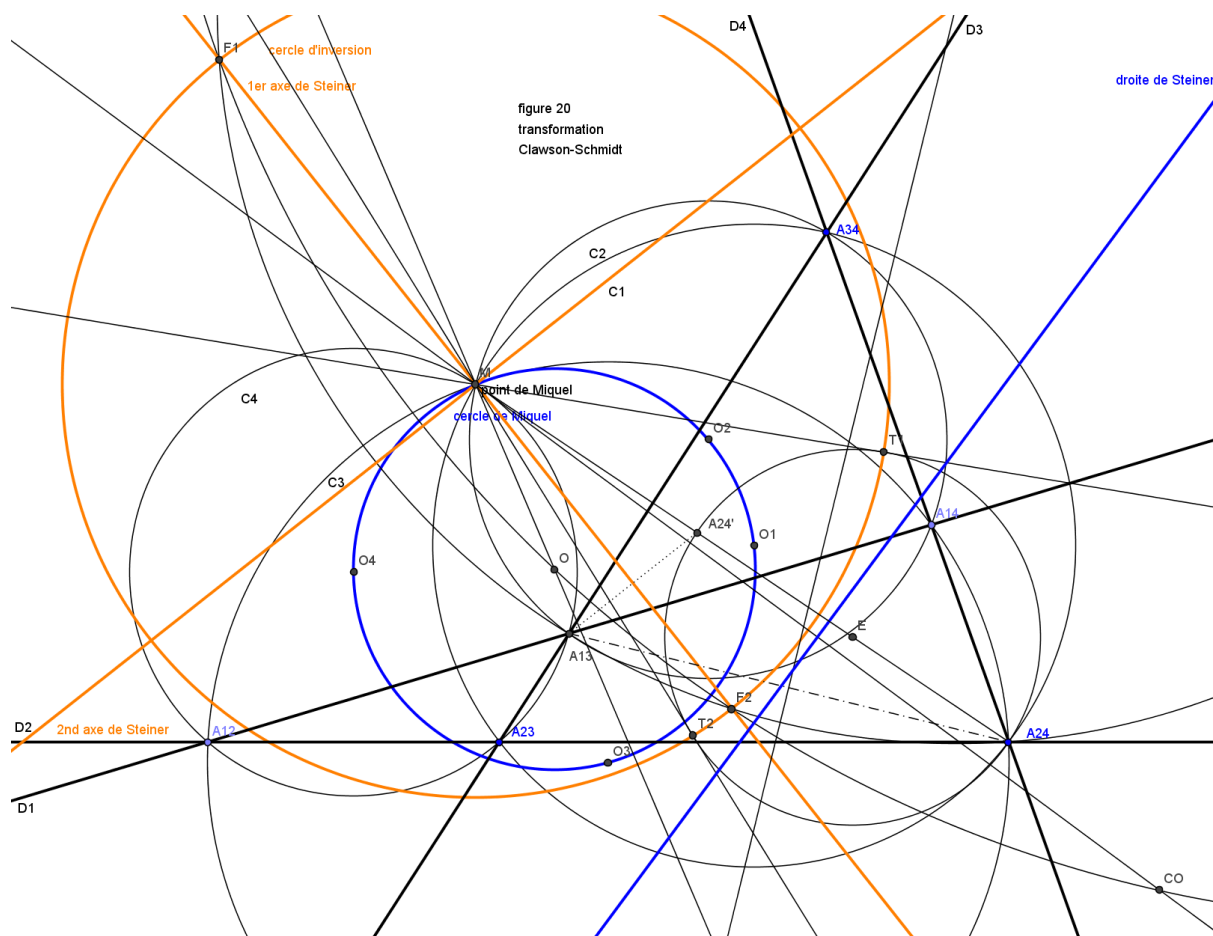


E) Transformations et constructions

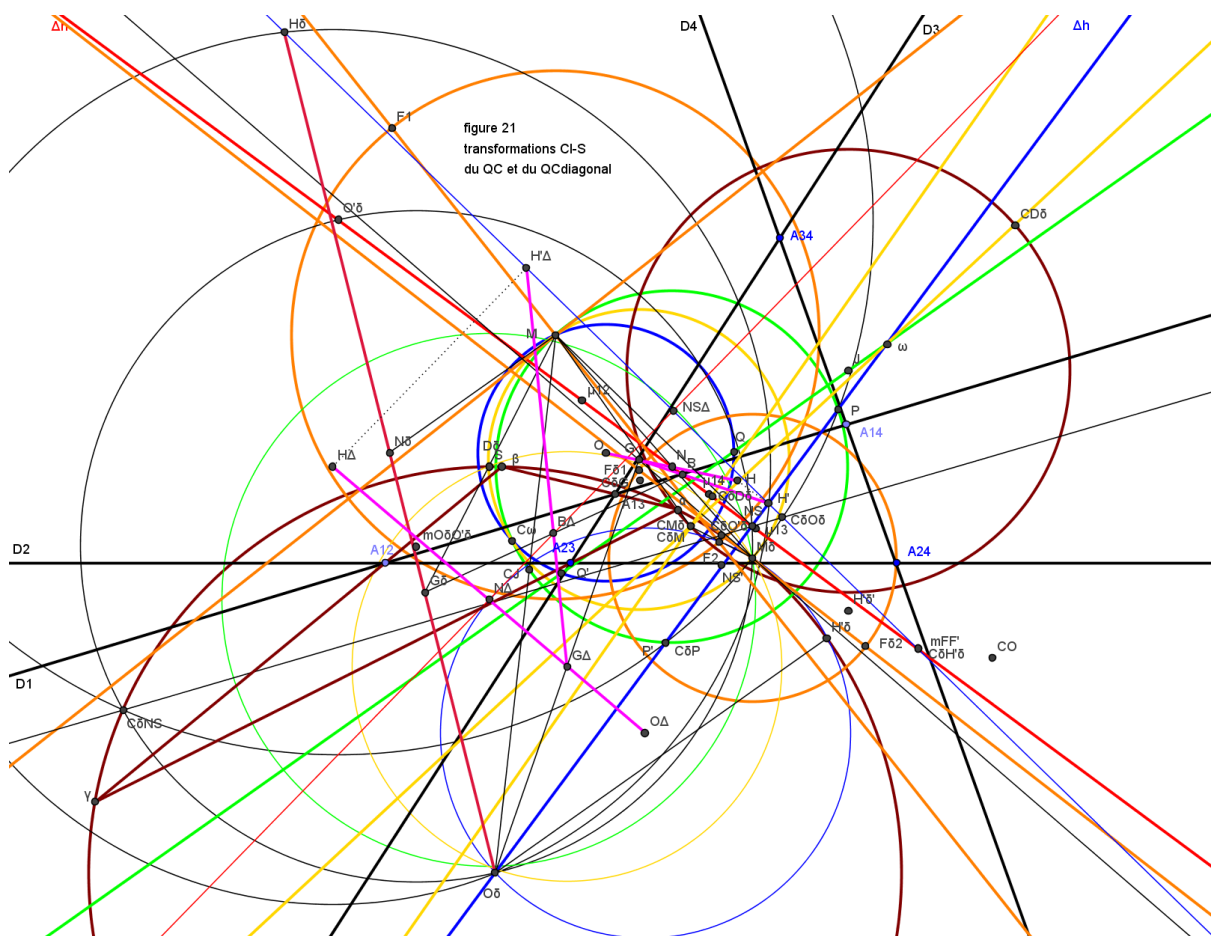
(figures 20, 21, 22, 23, 24 et 25)

(cf C.A. van Tienhoven dans EQF)

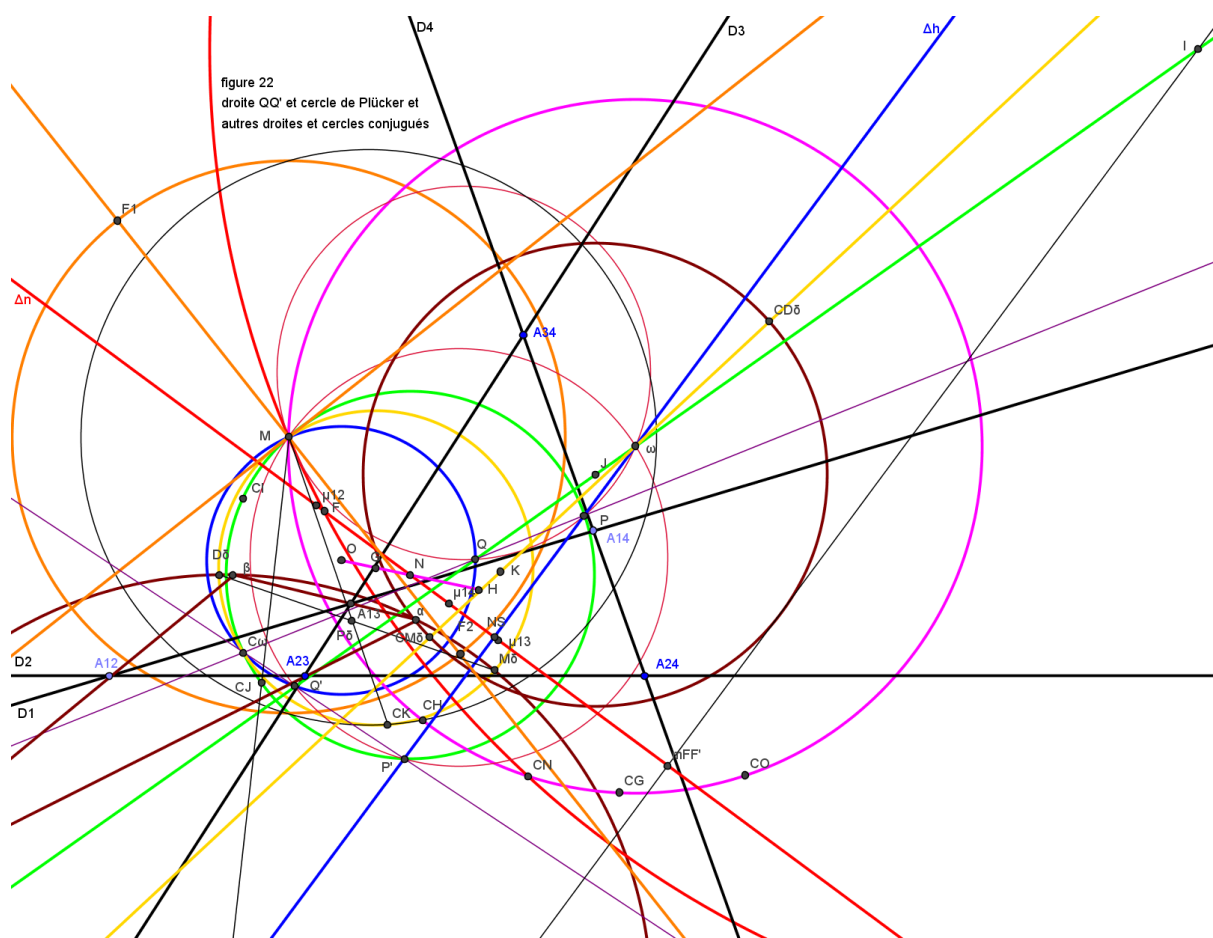
- On tire aisément de la similitude S_i des triangles T_i et t_i et des droites Δh et D_i (cf page 16) la mesure des segments et des angles du QC et une belle propriété :
 - on a appelé R_i le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence et θ_i l'angle orienté $(\Delta h, D_i)$ défini $\text{mod } 2\pi$
 - on a dès lors $R_i = 2r \cos \theta_i$, $OkOl = 2r \sin(\theta_l - \theta_k)$, $A_jk A_jl = 4r \cos \theta_i \sin(\theta_l - \theta_k)$ et $MA_{ij} = 4r \cos \theta_k \cos \theta_l$ (en toute rigueur avec des valeurs absolues).
 - on appelle M_x la parallèle menée par M à la droite de Newton
 - on a les mesures d'angles $(M_x ; MA_{ij}) = (\theta_i + \theta_j)$, $(M_x ; MO_i) = (\theta_j + \theta_k + \theta_l)$ et $(M_x ; MO) = \sum \theta_i$. Les bissectrices des angles $(M_x ; MO)$, $\angle A_{ij} M A_{kl}$ et de l'angle entre MO_i et la perpendiculaire en M à D_i sont confondues.
- On appelle p et p_i les distances de M à Δh et aux droites D_i . L'inversion de centre M et de rapport $2p_i R_i = 2p r = 16r^2 \prod \cos \theta_i$ transforme le QC en son symétrique par rapport à ces bissectrices et échange les droites et les cercles D_i et C'_i , C_i et D'_i , C et $\Delta'h$ et C' et Δh . Du coup, la transformation qui combine l'inversion et la symétrie axiale échange les points A_{ij} et A_{kl} et laisse le QC globalement inchangé ; énoncée par J. W. Clawson et par J. Marchand et développée par E. Schmidt, elle est appelée transformation Clawson-Schmidt (en bref Cl-S) ou QL-Tf1 dans EQF.
- Elle est déterminée par les 2 points invariants F_1 et F_2 ; ce sont les points QL-2P2 de EQF. Leur milieu est le point de Miquel M , le cercle de centre M passant par F_1 et F_2 est le cercle d'inversion, appelé cercle de Schmidt dans EQF et les bissectrices des angles $\angle A_{ij} M A_{kl}$ ou axes de symétrie sont appelés axes de Steiner dans EQF.



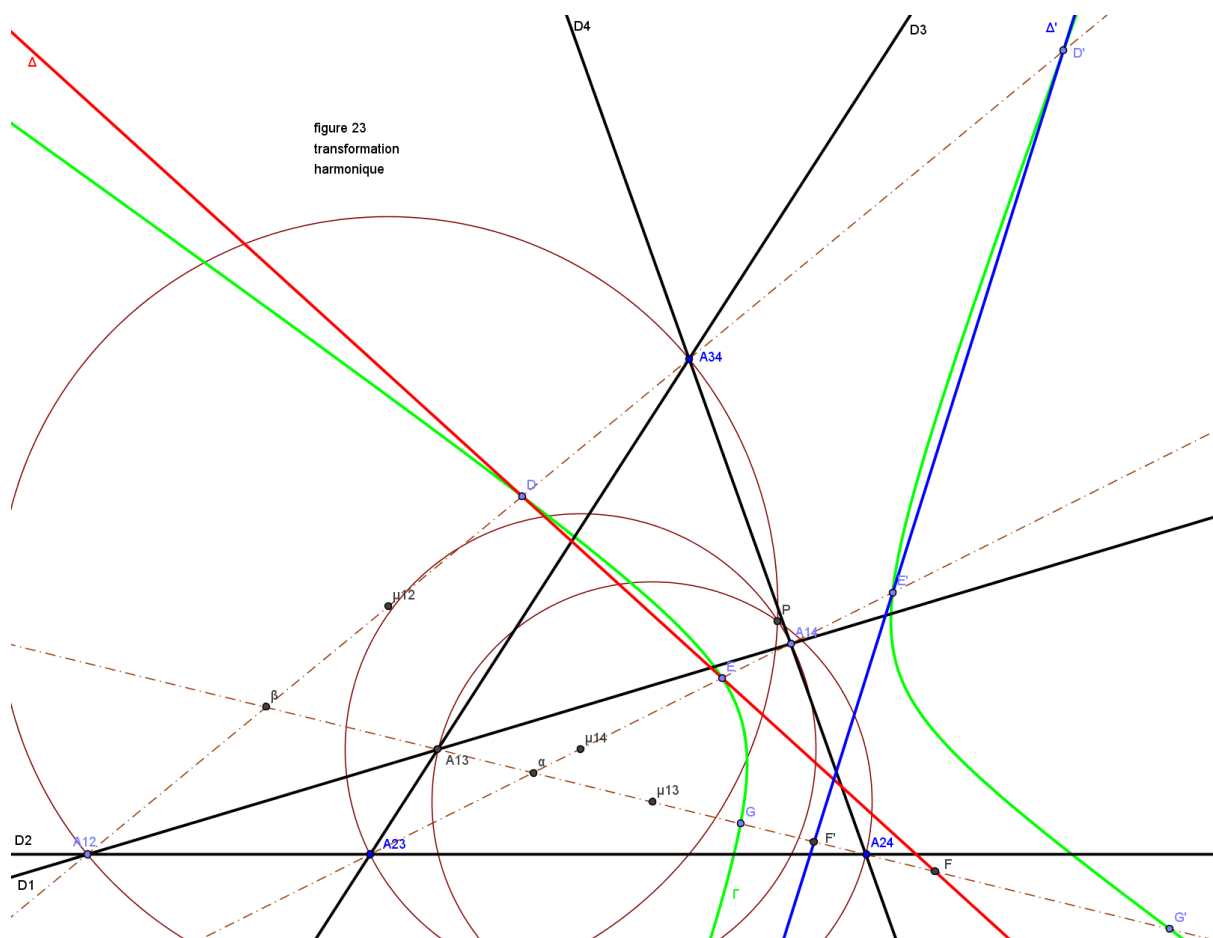
- Le QC diagonal formé par le triangle diagonal DT et la droite de Newton Δn détermine une transformation Clawson-Schmidt appelée Cl-Sdiag ; elle est définie par 2 points invariants $F1\delta$ et $F2\delta$, le cercle de centre $M\delta$ passant par $F1\delta$ et $F2\delta$ est son cercle d'inversion et les bissectrices des angles $\alpha M\delta\mu12$, $\beta M\delta\mu14$ et $\gamma M\delta\mu13$ sont ses axes de Steiner.
- Cette Cl-Sdiag échange les sommets du triangle diagonal α , β et γ et les milieux des diagonales μ_{ij} , les points de Plücker P et P' et la droite de Newton Δn et le cercle circonscrit au triangle diagonal $C\delta$.
- Les points conjugués de $M\delta$ dans la transformation Cl-S et de M dans la transformation Cl-Sdiag coïncident ; on a $Cl-S(M\delta) = Cl-Sdiag(M)$.
- On peut encore noter que les transformations Cl-S et Cl-Sdiag conservent les propriétés d'angles, comme la symétrie axiale et l'inversion ; ainsi, 2 droites perpendiculaires se transforment en 2 cercles orthogonaux passant par M ou $M\delta$.
- Ceci permet de démontrer un certain nombre de propriétés intéressantes ; ainsi, pour ne prendre qu'un exemple, la droite $Cl-Sdiag(O\delta)Cl-Sdiag(NS)$ passe par le point NS (cette droite est la transformée Cl-Sdiag du cercle passant par $O\delta$, NS et $M\delta$ et par le centre du cercle transformé de Δh dans Cl-Sdiag, qui passe aussi par $M\delta$ et NS et est orthogonal au cercle circonscrit au triangle diagonal $C\delta$).



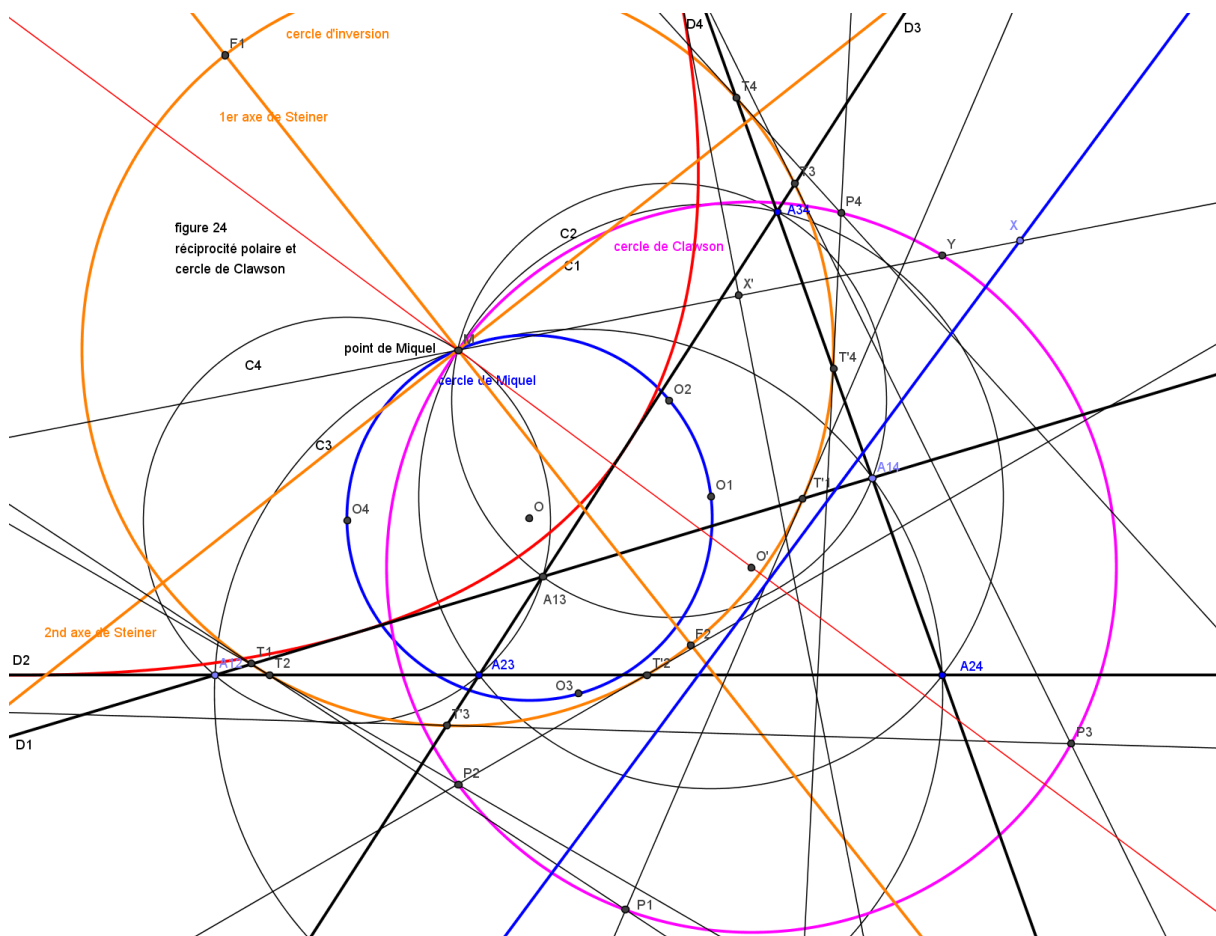
- On considère les 2 points Q et Q' , conjugués des points de Plücker P et P' dans la transformation Clawson-Schmidt ; on a $Q = Cl-S(P)$ et $Q' = Cl-S(P')$. Q et Q' sont les points QL-2P2 de EQF.
- P et P' étant 2 points de Δh situés à l'intersection des 3 cercles ayant pour diamètres les diagonales $A_{ij}A_{kl}$ du QC, Q et Q' sont sur le cercle de Miquel et sur 3 autres cercles passant par 2 sommets opposés du QC.
- Ces 2 points Q et Q' sont, comme P et P' , conjugués Cl-Sdiag ; $Q' = Cl-Sdiag(Q)$.
- Les 3 cercles de Plücker, Dimidium et de Plücker ont leurs centres O , G et N alignés ; ils passent par M et par le symétrique de M par rapport à la droite d'Euler du QI des O_i , situé à l'intersection des droites PQ et $P'Q'$. Du coup, les conjugués Cl-S de ces 3 cercles sont 3 droites concourantes en un point ω , 2^{nde} intersection des cercles passant respectivement par M , P et Q et par M , P' et Q' .
- Le conjugué Cl-S du point de Lemoine K est situé sur le cercle Dimidium ; c'est la seconde intersection de $MP\delta$ avec ce cercle et K se situe sur la droite conjuguée du cercle Dimidium.
- Le conjugué Cl-S de la droite de Newton Δn est un cercle qui passe par M et recoupe Δn en 2 points conjugués Cl-S F et F' ; ce cercle est orthogonal au cercle de Miquel. Comme Δn est un diamètre du cercle de Plücker, QQ' est un diamètre de ce cercle, çàd que son centre I est sur QQ' , à l'intersection avec la médiatrice de FF' .
- Le cercle $C\delta$ circonscrit au triangle diagonal DT a pour conjugué Cl-S un cercle de centre J . Le conjugué Cl-S de J est le point CJ , inverse de M par rapport au cercle $C\delta$; ce point étant situé sur le cercle de Plücker, J est sur QQ' .



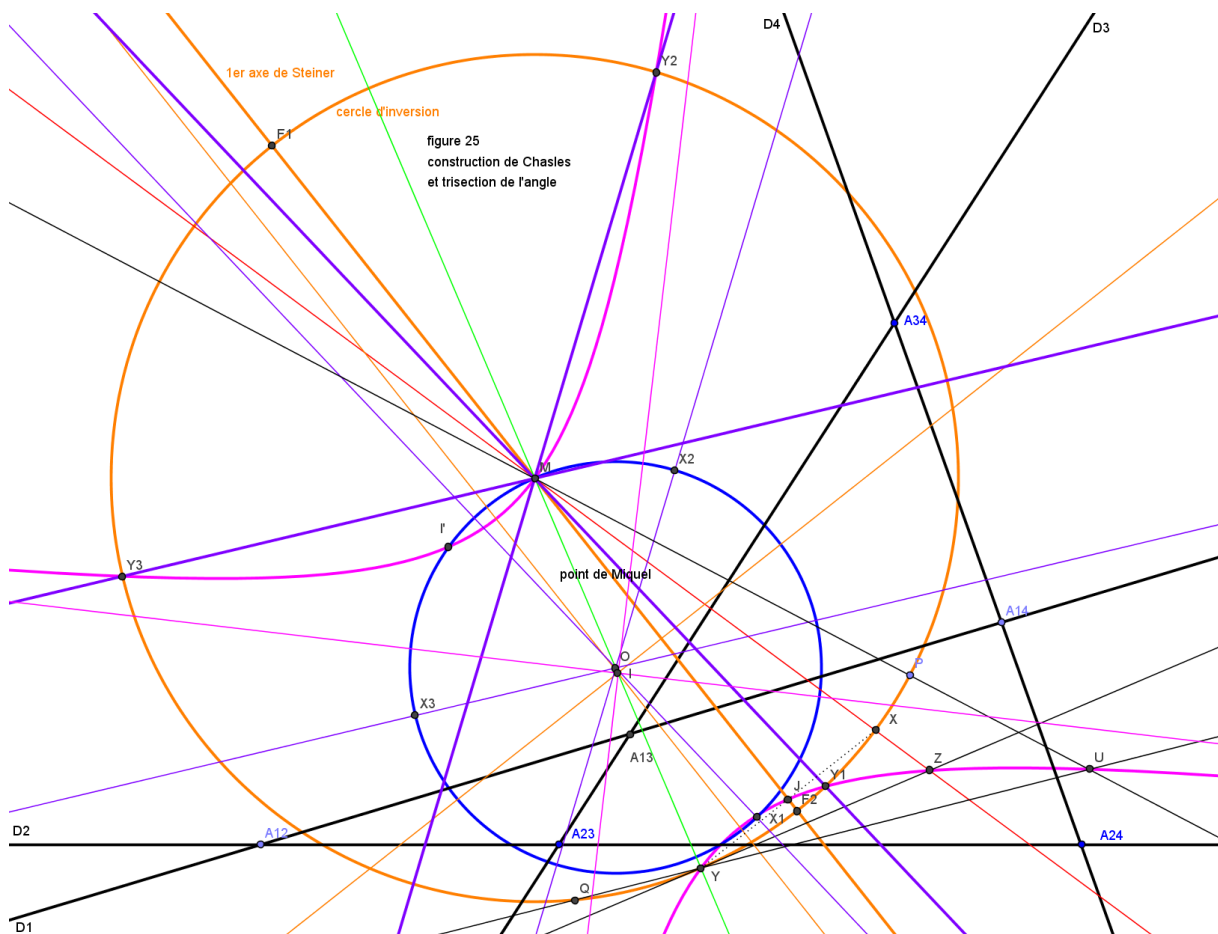
- On considère le QC et ses diagonales $A_{ij}A_{kl}$ et une droite quelconque Δ , qui coupe les 3 diagonales en 3 points D, E et F ; les conjugués harmoniques respectifs D' , E' et F' de D, E et F par rapport aux points A_{ij} et A_{kl} de la diagonale correspondante (ce sont les inverses de D, E et F par rapport aux cercles de diamètres $A_{ij}A_{kl}$) sont alignés sur une droite Δ' .
- La transformation qui associe Δ' à Δ est notée QL-Tf2 dans EQF.
- Un cas particulier est celui où Δ et Δ' sont perpendiculaires : un exemple est constitué par les côtés et les hauteurs du triangle diagonal.
- Deux droites quelconques sont une forme dégénérée de conique. La transformation QL-Tf2 pour une conique s'exprime de la manière suivante : si une conique Γ coupe 2 diagonales du QC en 2 points D et D' et E et E' conjugués harmoniques par rapport aux sommets du QC portés par ces diagonales, elle coupe aussi la 3^{ème} diagonale en 2 points G et G' conjugués harmoniques par rapport aux 2 derniers sommets.
- Le cas particulier de droites perpendiculaires est une forme dégénérée d'hyperbole équilatère ; on rencontrera plus loin une famille d'hyperboles équilatères qui coupent harmoniquement les 3 diagonales du QC.



- On a vu que les distances de M à la droite Δh et aux droites D_i s'exprimaient par p et p_i avec $p = 8r \Pi \cos\theta_i$ et $p_i = p/2\cos\theta_i$.
- Une propriété du QC mentionnée par J. W. Clawson est que son transformé dans la transformation qui associe à chaque droite son pôle par rapport à un cercle quelconque de centre M est un quadrangle inscriptible.
- Si l'on prend par exemple le cercle d'inversion de centre M passant par F1 et F2 et de rayon ρ tel que $\rho^2 = 2pr = 2p_i r_i = 16r^2 \Pi \cos\theta_i$, le cercle circonscrit aux 4 pôles P_i des droites D_i par rapport à ce cercle a pour centre un point O' de l'axe Mx (parallèle par M à la droite de Newton Δn et symétrique de MO par rapport au 1^{er} axe de Steiner) et pour rayon $2r$. Ce cercle, appelé cercle de Clawson par E. Schmidt, se déduit du cercle de Miquel par une transformation qui associe une symétrie par rapport au 1^{er} axe de Steiner et une homothétie de centre M et rapport 2.
- Cette construction permet de démontrer un certain nombre de propriétés. Ainsi, la polaire de O' par rapport au cercle d'inversion est la droite de Steiner Δh .
- Toute courbe tangente aux 4 droites D_i se transforme en une courbe passant par les 4 pôles P_i . Ainsi, par exemple, la parabole tangente aux 4 droites D_i (cf partie F) a pour transformée le cercle de Clawson lui-même. La deltoïde tangente aux 4 droites D_i (cf partie G) se transforme en une cubique passant par les 4 pôles P_i , ses 3 points d'inflexion réels correspondant aux 3 points de rebroussement de la deltoïde.



- Cette construction est inspirée de la construction de Chasles présentée par Roger Cuppens dans un bulletin de l'APMEP (29).
- On donne le cercle d'inversion de centre M et 2 points X et Y de ce cercle, MX étant l'axe de la parabole tangente aux 4 droites D_i (cf partie F), parallèle par M à la droite de Newton Δ_n et MY l'axe de la monocardiïde tangente aux 4 cercles C_i (cf partie H) passant par O ; le 1^{er} axe de Steiner est la bissectrice de l'angle XMY.
- On souhaite maintenant trisecter l'angle $\angle XMY$ ou, ce qui revient au même, l'angle $\angle F_2MX$.
- Pour cela, on associe à tout point P du cercle d'inversion le point Q défini par $(\text{arc} QY) = 2(\text{arc} XP)$ et on appelle U l'intersection de MP avec YQ. Le lieu du point U est une hyperbole équilatère qui passe par les 3 points Y1, Y2 et Y3 trisectant l'arc XY et l'angle $\angle XMY$ et par l'orthocentre M du triangle Y1Y2Y3. Elle passe aussi par les points Y (P en Y), I milieu de XY (P en F2), l' symétrique de I par rapport à M (PM perpendiculaire à PY et Q diamétralement opposé à Y) et Z intersection de MX avec la tangente en Y au cercle d'inversion (P en X). Elle est centrée au milieu de MY et a ses axes de symétrie parallèles aux axes de Steiner, les asymptotes étant les bissectrices de l'angle fait par les 2 axes de symétrie.
- Dès lors, la construction complète est la suivante : une fois donnés le cercle de centre M et les points X et Y de ce cercle, on détermine les milieux I de MY et J de XY et le point Z. L'hyperbole équilatère de centre I et d'axes de symétrie parallèles aux axes de Steiner passant par M, Y et J recoupe le cercle de centre M en 4 points Y, Y1, Y2 et Y3 ; MY1, MY2 et MY3 trisectent l'angle $\angle XMY$.
- Cette construction sera utilisée pour déterminer les axes de la deltoïde (cf partie G), les triangles de Morley (cf partie I) et les asymptotes de la stelloïde cubique (cf partie K).

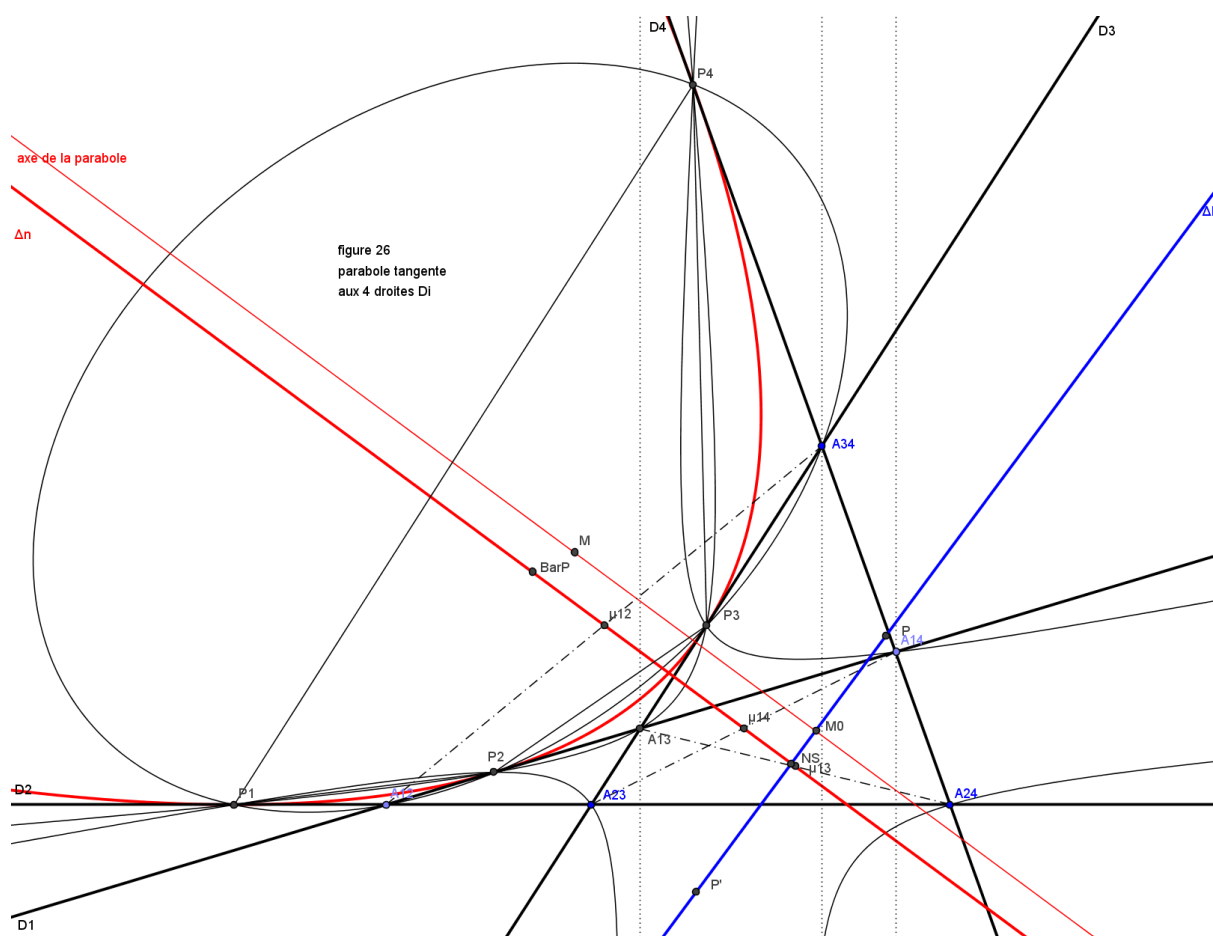


F) Parabole tangente aux 4 droites D_i et parabole associée

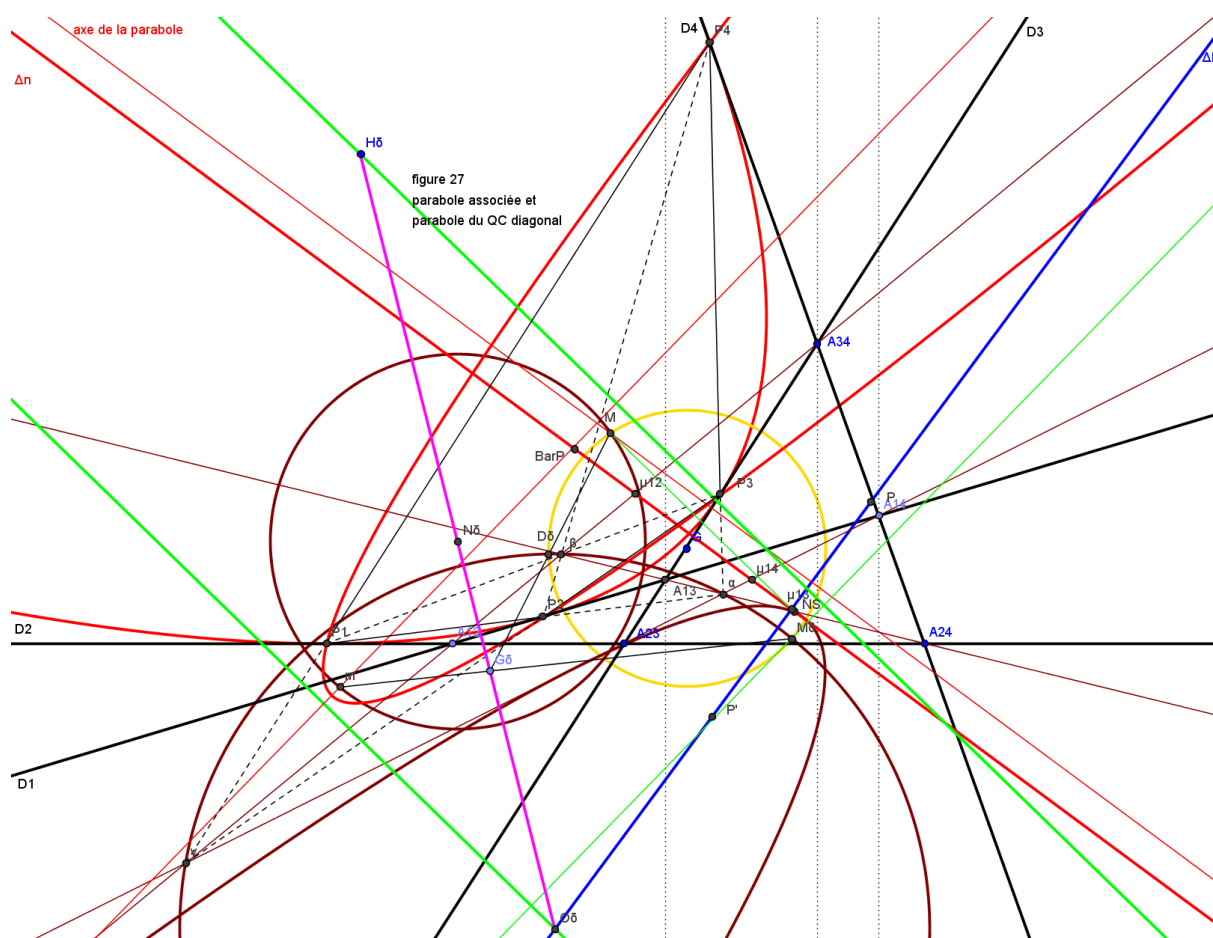
(figures 26 et 27)

(cf C.A. van Tienhoven dans EQF)

- Il existe une parabole unique tangente aux 4 droites D_i ; c'est la conique QL-Co1 de EQF.
- Le point de Miquel M est le foyer de cette parabole.
- L'axe de cette parabole est la parallèle par M à la droite de Newton Δ_n , appelée Mx .
- La droite de Steiner Δ_h est la directrice de cette parabole.
- p étant son paramètre, distance de M à Δ_h , p_i la distance de M à D_i et θ_i l'angle de D_i avec Δ_h , on a $p = 8r\Pi\cos\theta_i$ et $p_i = 4r\cos\theta_j\cos\theta_k\cos\theta_l = p/2\cos\theta_i$.
- P_0 est le sommet de la parabole, δ sa tangente en P_0 ; c'est la droite QL-L3 de EQF.
- M_0 est le point d'intersection de l'axe Mx et de la directrice Δ_h
- Si l'on considère le triangle T_i constitué par 3 tangentes D_j , D_k et D_l , le foyer M est sur le cercle C_i circonscrit à T_i , la tangente au sommet δ et la directrice Δ_h étant les droites de Simson et de Steiner de M par rapport à T_i ; ceci justifie l'appartenance de M aux 4 cercles C_i .
- P_i est le point de contact de D_i avec la parabole ; P_i est sur la perpendiculaire en M_i à Δ_h . M_iM est perpendiculaire à D_i et les triangles P_iMM_i sont isocèles, les angles à la base étant égaux à θ_i . On a $MP_i = p_i / \cos\theta_i = p / 2 \cos^2\theta_i$ et, en effectuant le produit, $\Pi MP_i = p^4 / 16 (\Pi \cos\theta_i)^2 = 4 p^2 r^2$.
- $\text{Bar}P$, l'isobarycentre des 4 points P_i , est sur Δ_n .
- La distance de M à Δ_n est $p_n = p/4 \sum \text{tg}\theta_i$.



- C.A. van Tienhoven a introduit dans EQF un complément intéressant. Par les 4 points de tangence appelés P_i , il passe 2 paraboles circonscrites, la première étant la parabole tangente aux 4 droites D_i . La seconde a pour foyer un point du cercle d'Euler du triangle diagonal, appelé QL-P25 dans EQF, qui se construit comme le complément par rapport au triangle diagonal du point $M\delta$, l'un des 2 points d'intersection du cercle circonscrit au triangle diagonal et du cercle intermédiaire ou Dimidium (cf page 24 et figure 7). Elle a pour directrice la parallèle menée par le point $O\delta$, centre du cercle circonscrit au triangle diagonal, à la droite joignant le point de Miquel M au point de Newton-Steiner NS , point d'intersection des droites de Newton et de Steiner.
- Cette parabole est le complément de la parabole décrite page 25, tangente aux 3 diagonales et à la droite de Newton, ces 4 droites constituant le QC diagonal ; elle a pour foyer le point $M\delta$ et pour directrice la droite de Steiner $H\delta H'$ du QC diagonal.
- La seconde parabole est appelée QL-Co3 dans EQF. Les tangentes à la seconde parabole aux points de contact P_i déterminent un second QC et les 2 QC ont même triangle diagonal, qui est aussi celui du quadrangle formé par les 4 points, ce qui détermine quelques belles propriétés symétriques. Les foyers des 2 paraboles sont sur le cercle d'Euler du triangle diagonal commun, les 2 directrices se coupent au centre du cercle circonscrit à ce triangle et la directrice de chacune des 2 paraboles est parallèle au segment joignant le point de Miquel au point de Newton-Steiner de l'autre QC (Δh est parallèle à NSM et $\Delta h'$ est parallèle à NSM') ; enfin, les 2 droites de Newton se coupent en un point qui est le barycentre $BarP$ des 4 points de contact P_i .

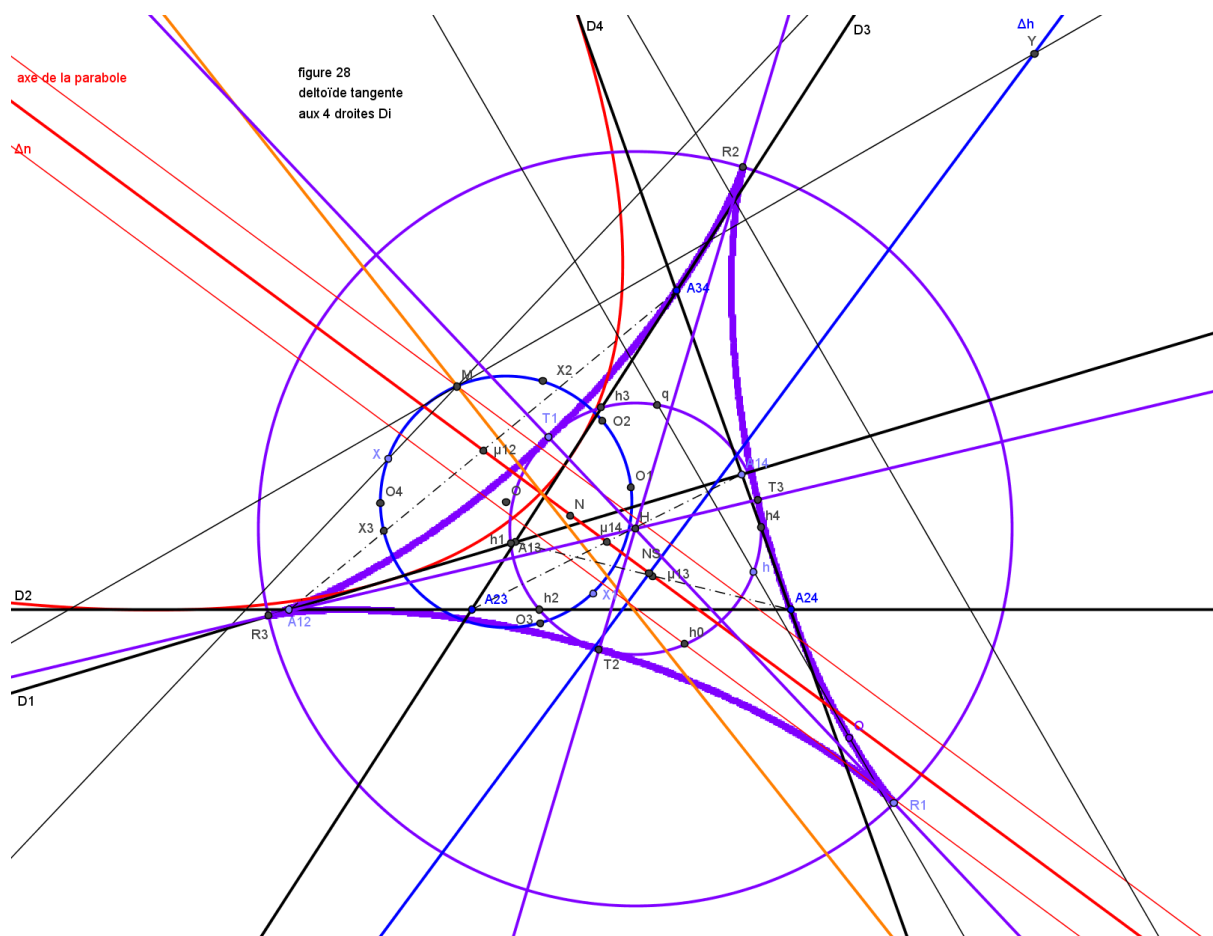


G) Deltoïde tangente aux 4 droites D_i

(figure 28)

(cf Laguerre (4) et J. Lemaire (9))

- Il existe une deltoïde, hypocycloïde à 3 rebroussements ou H_3 , tangente aux 4 droites D_i ; c'est la deltoïde de Kantor-Hervey ou quartique QL-Qu2 de EQF.
- Le point de Kantor-Hervey H est le centre du cercle de Hervey (cf partie C page 19) inscrit dans cette H_3 ; R_1 , R_2 et R_3 sont les sommets de la H_3 (points de rebroussement) et T_1 , T_2 et T_3 ses points de contact et de tangence avec son cercle inscrit. R_1T_1 , R_2T_2 et R_3T_3 sont tangentes à la H_3 , se coupent en H et sont les axes de symétrie de la H_3 ; elles font un angle de $1/3 \sum \theta_i$ ($m^\circ 2\pi/3$) avec M_x .
- On peut donner une construction simple de la deltoïde : pour un point X du cercle de Miquel, on détermine le point Y conjugué Cl-S de X , situé sur la droite de Steiner Δh et le symétrique h de X par rapport au centre de Clawson N . La médiatrice de MY est tangente à la parabole et la parallèle à cette droite par le point h est tangente à la deltoïde ; elle coupe le cercle de Hervey en un second point q et le symétrique Q de q par rapport à h est le point de contact de la tangente avec la deltoïde.
- Les points T_1 , T_2 et T_3 sont situés sur les arcs hq entre h et q au tiers à partir de h .
- Lorsque X est en O_i , h est en h_i , q_i est le point d'intersection autre que h_i de D_i avec le cercle inscrit dans la H_3 et Q_i , symétrique de q_i par rapport à h_i , est le point de contact de D_i avec la H_3 .
- Lorsque X est en M , Y est le point à l'infini de la droite de Steiner et la tangente à la parabole est son axe M_x ; la parallèle à M_x par le symétrique h_0 de M par rapport à N , symétrique de M_x par rapport à la droite de Newton Δn , est une tangente à la deltoïde.

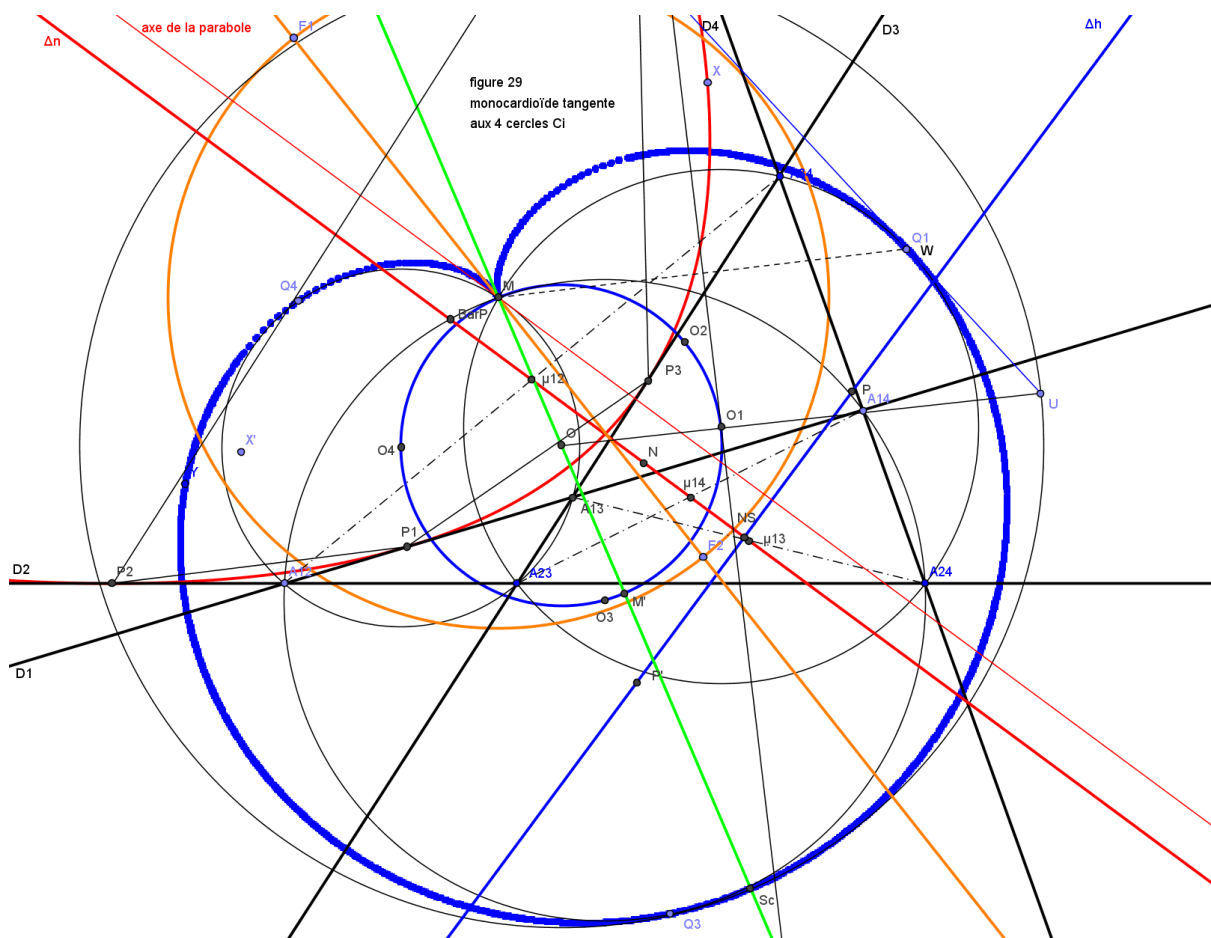


H) Monocardiïde tangente aux 4 cercles C_i

figure 29

(cf F. Morley (7) et A. Bogomolny (22))

- On a vu précédemment que la transformation Clawson-Schmidt laissait le QC globalement invariant, les droites D_i et les cercles C_i échangeant leurs rôles.
- La courbe transformée de la parabole tangente aux 4 D_i est une cardioïde tangente aux 4 cercles C_i , épicycloïde à 1 rebroussement ou $E1$; c'est la quartique appelée monocardiïde de Morley QL-Qu1 de EQF.
- Cette cardioïde admet M comme point de rebroussement, MO comme axe de symétrie, O comme centre du cercle intérieur de rayon r (cercle de Miquel) et du cercle directeur de rayon $3r$, M' symétrique de M par rapport à O comme centre du cercle inscrit de rayon $2r$ et Sc , symétrique de M par rapport à M' comme sommet.
- L'angle entre les axes de la parabole et de la cardioïde est $(Mx; MO) = \sum \theta_i$ et on a $MSc = 2 MM' = 4 MO = 4r$.
- On peut donner une construction simple de la cardioïde : sur le cercle de centre O et de rayon $OSc = 3r$, on place un point U et son symétrique V par rapport à OU ; UV est tangente à la cardioïde et le point de contact W est situé au tiers à partir de A .
- Lorsque U_i est aligné avec O_i ($OU_i = 3 \cdot OO_i$), le point de contact $W_i = Q_i$ avec le cercle C_i est le symétrique de M par rapport à la tangente au cercle (C) au point O_i .

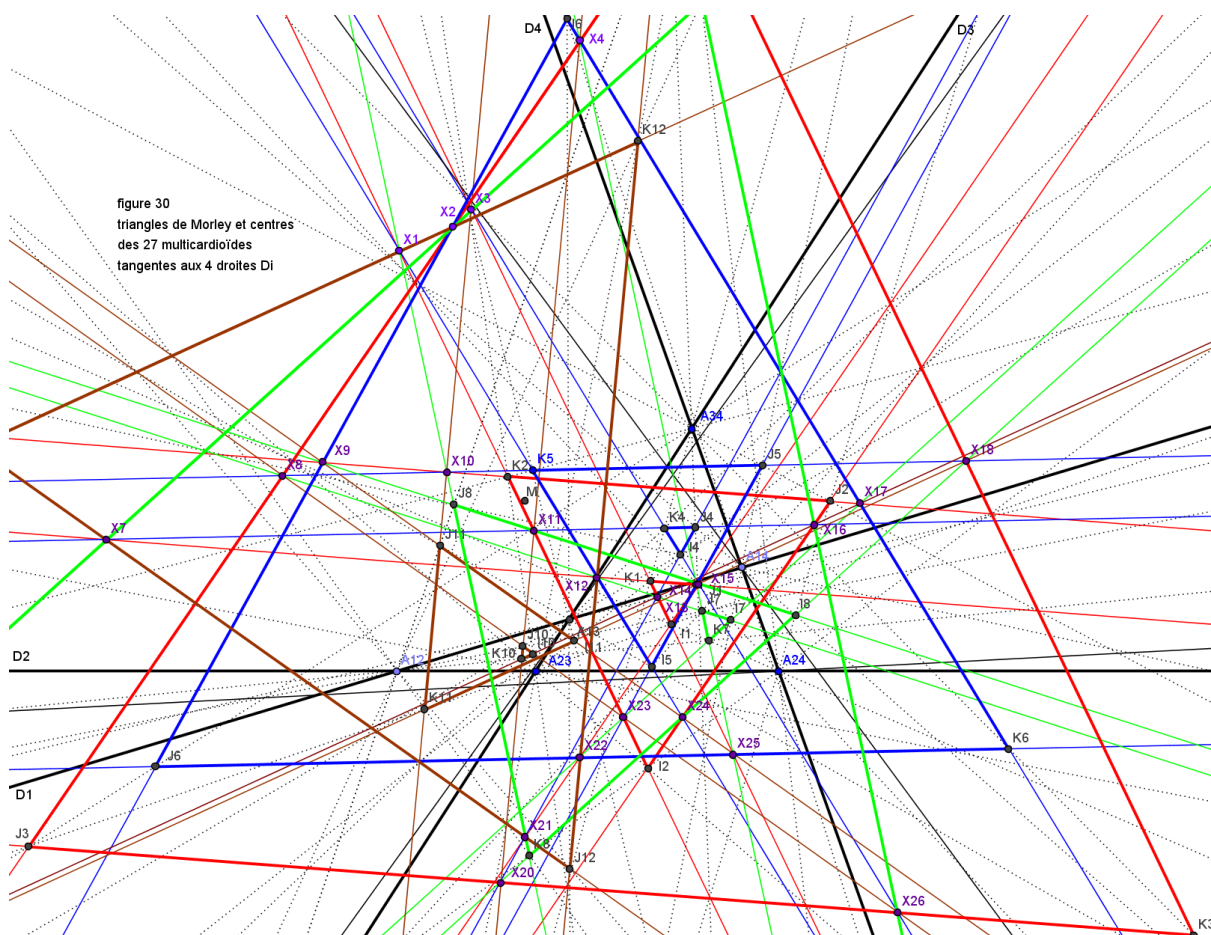


I) Triangles de Morley et multicardioides tangentes aux 4 droites D_i

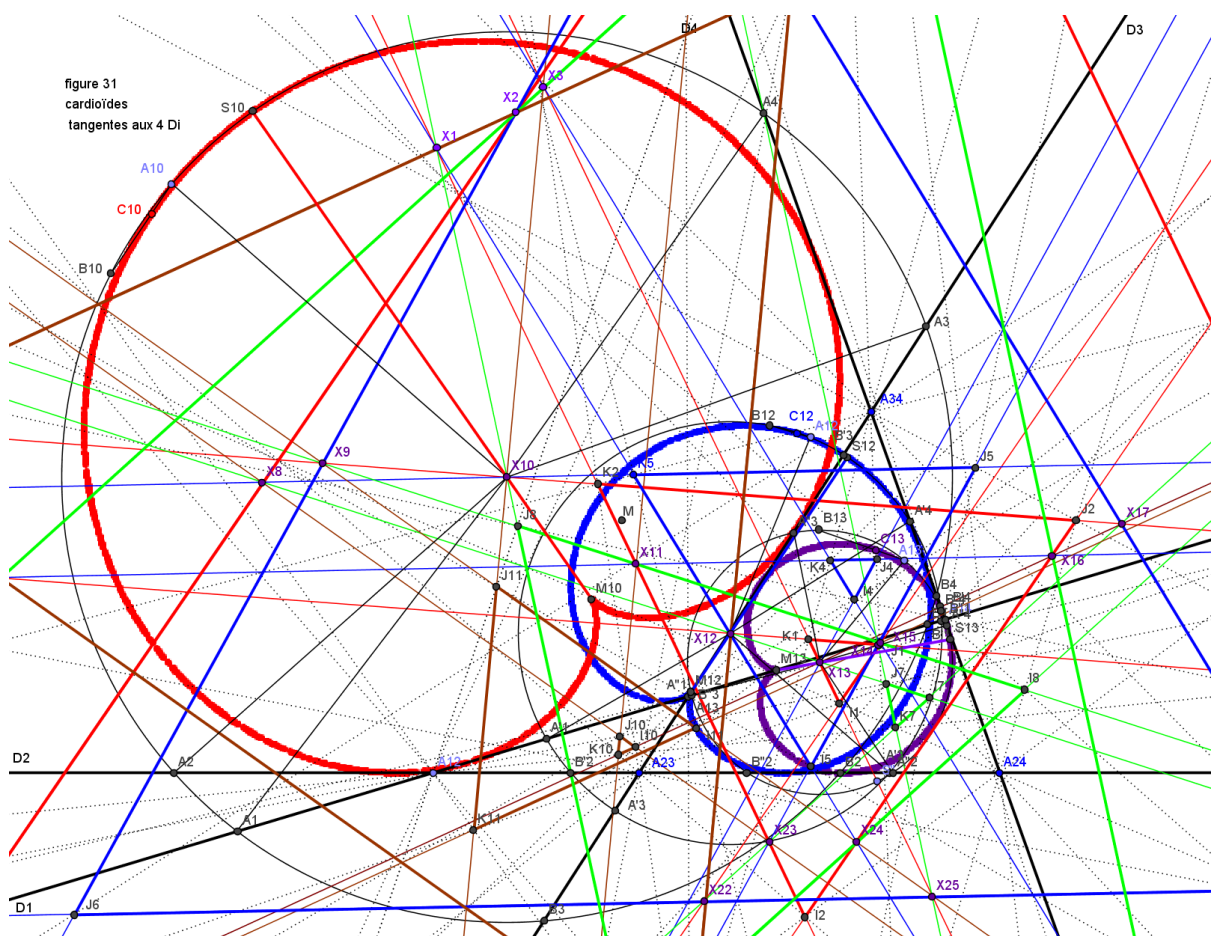
(figures 30 et 31)

(cf F. Morley (7), Sister Mary Gervase (11), R . Bricard (14), Général Marmion (20) et A. Viricel (21))

- On sait que Frank Morley a trouvé son merveilleux théorème sur les trisectrices en étudiant les cardioides. Chaque cardioïde admet une bitangente et chaque tangente ordinaire coupe cette bitangente en un point tel que la droite joignant ce point au centre est une trisectrice de l'angle fait par la tangente avec la bitangente.
- Le lieu des centres des cardioides tangentes aux 3 côtés d'un triangle est un maillage de $3 \times 3 = 9$ droites, appelées axes du triangle et dont les directions sont celles des triangles de Morley et sont parallèles à la direction moyenne des 3 côtés $m^\circ \pi/3$. Ces droites déterminent 27 triangles équilatéraux et si le centre est situé en l'un des sommets, la cardioïde admet un des côtés du triangle comme tangente double.
- Le premier triangle équilatéral principal de Morley a pour sommets les 3 points I_1, J_1 et K_1 intersections des trisectrices intérieures adjacentes aux côtés ; les 2 autres triangles équilatéraux principaux de Morley ont pour sommets les points I_2, J_2 et K_2 intersections des trisectrices extérieures adjacentes aux côtés et I_3, J_3 et K_3 .
- En théorie, pour le QC, pour qu'une cardioïde soit tangente aux 4 triangles T_i , il faut que son centre soit sur une des intersections des 4 maillages, ce qui devrait représenter 81 points possibles. En pratique, il y a 27 points d'intersection, chaque point se situant à l'intersection de 4 droites (1 par maillage) et chacune des 36 droites portant 3 points.



- Eckart Schmidt, membre du groupe Quadrifigures, a prouvé que ces 27 points appartiennent à une cubique, dont les axes, parallèles à ceux de la deltoïde, se coupent au point de Miquel et Bernard Gibert, grand spécialiste des cubiques, a consacré une étude complète à cette courbe.
- Pour une deltoïde de centre O, les points primaires h_i sont situés sur le cercle directeur de telle sorte que $(O h_i ; O h_j) = 2 (D_i ; D_j)$ et il n'y a qu'une forme de quadrilatère de sommets h_i , les angles entre les côtés étant égaux à $(D_i ; D_j)$. Pour une cardioïde de centre O, les points primaires e_i sont disposés sur le cercle directeur de telle manière que $(O e_i ; O e_j) = 2/3 (D_i ; D_j) \text{ m}^\circ \pi/3$. A partir d'un ensemble de 4 droites D_i , on peut choisir parmi 3 valeurs possibles pour 3 des 4 angles et il y a donc 27 quadrilatères inscrits de sommets e_i de formes différentes, les angles entre les côtés étant égaux à $1/3 (D_i ; D_j) \text{ m}^\circ \pi/3$.
- ***Or il n'existe qu'une manière d'inscrire un quadrilatère de forme donnée dans un ensemble de 4 droites données (avec un sommet sur chaque droite).***
- Pour la deltoïde, le lieu du centre est, pour un triangle donné, la médiatrice d'Euler et, pour le QC, ces 4 médiatrices sont concourantes, ce qui constitue le théorème de Kantor-Hervy. Pour la cardioïde, ce lieu est, pour un triangle donné, le maillage de Morley et, pour le QC, l'intersection de ces 4 maillages, constituée des 27 points appartenant à la conique identifiée par Eckart Schmidt et étudiée par Bernard Gibert.
- ***Il y a 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites D_i du QC; ce sont les quartiques appelées multicardioïdes de Morley QL-27Qu1 de EQF.***
- On a représenté sur la figure 31 les cardioïdes de centres X10, X12 et X13. Les droites D_i sont orientées comme pour la parabole pour la cardioïde de centre X12 et comme pour la deltoïde pour celle de centre X13.

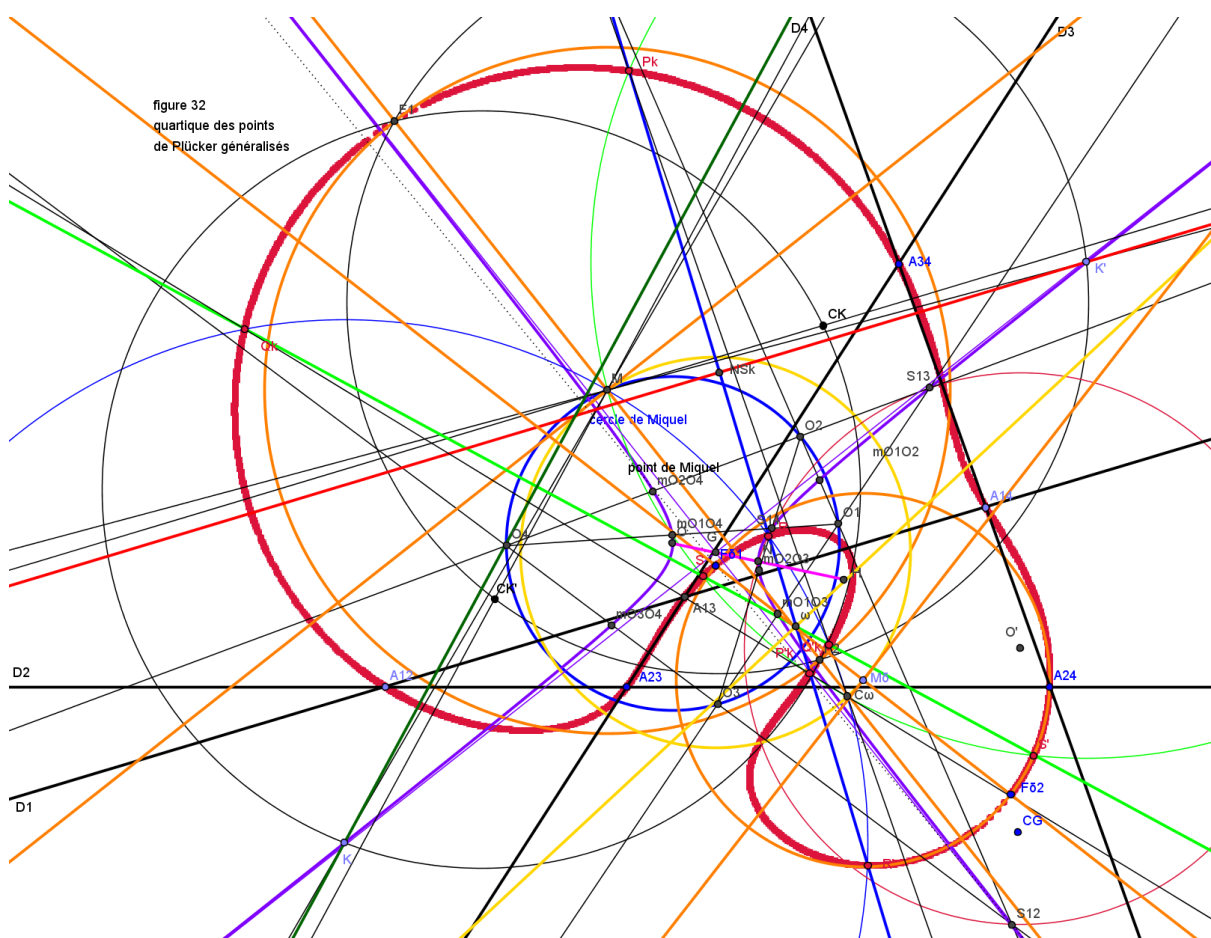


J) Quartique des points de Plücker généralisés

(figure 32)

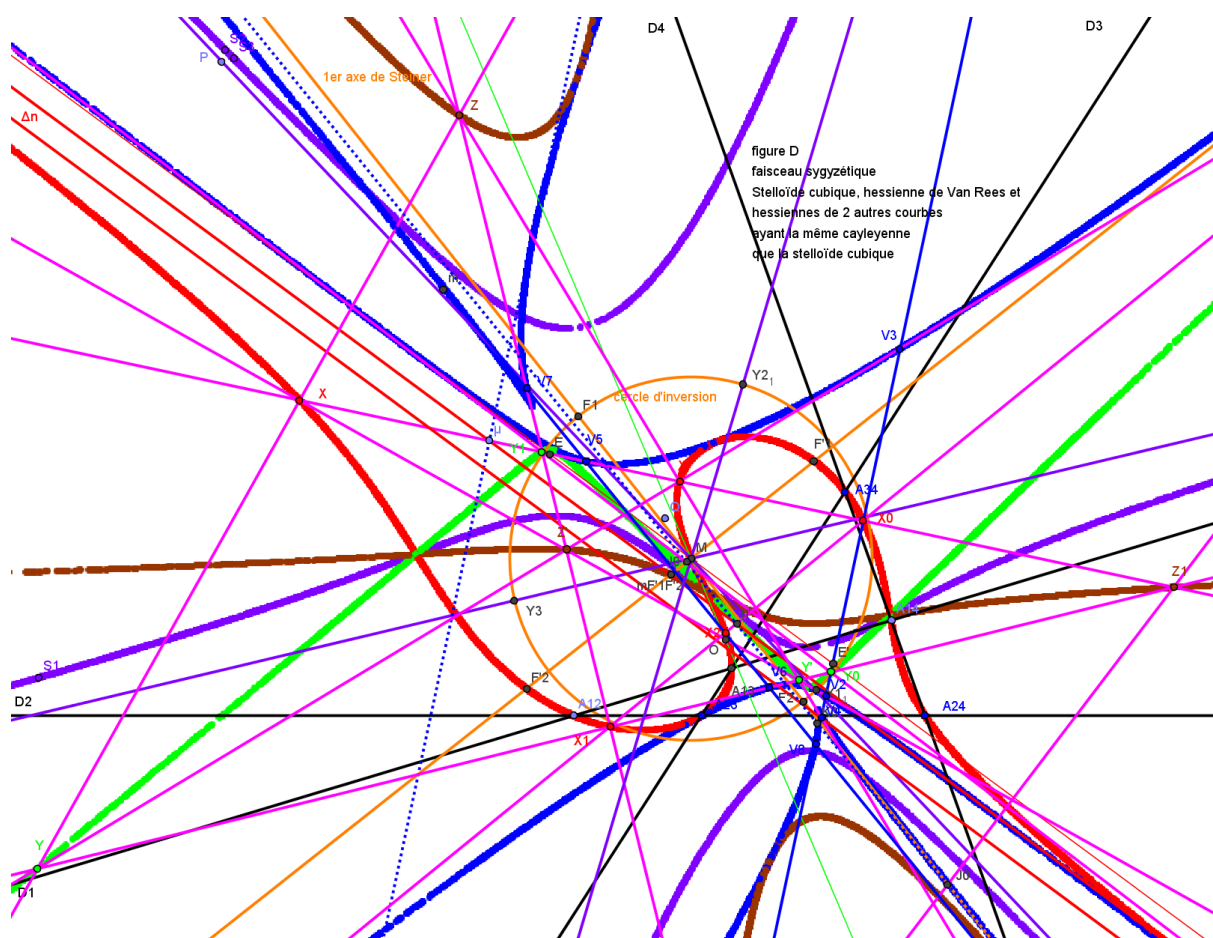
(cf E. Schmidt (26))

- On a vu que les points de Plücker P et P' sont sur les 3 cercles ayant pour diamètres les diagonales $A_{ij}A_{kl}$ du QC et que les 3 cercles conjugués de ces 3 cercles passent aussi par A_{ij} et A_{kl} et par les conjugués $Cl-S$ Q et Q' de P et P' .
- On considère plus généralement l'ensemble des points X et X' situés sur 3 cercles passant par les couples de points A_{ij} et A_{kl} .
- X et X' décrivent une quartique qui passe par les 6 sommets du QC, par les points P et P' , Q et Q' , $F1$ et $F2$ et $F1\delta$ et $F2\delta$, invariants des transformations $Cl-S$ et $Cl-Sdiag$.
- Pour construire la quartique, on donne 2 points K et K' symétriques par rapport à G sur l'hyperbole équilatère de centre G passant par O et N et décrite sur la figure 13. On construit les cercles de centres K et K' passant par M et leurs conjugués $Cl-S$, 2 droites qui coupent les 2 cercles respectivement en P_k , P'_k , R_k et R'_k et Q_k , Q'_k , S_k et S'_k .
- P et Q , P' et Q' , R et R' , S et S' sont 4 couples de points conjugués $Cl-S$.
- P et P' , Q et Q' , R et S et R' et S' sont 4 couples de points conjugués $Cl-Sdiag$.
- Lorsque K et K' décrivent l'hyperbole équilatère de la figure 13, les 8 points décrivent la quartique, qui est ainsi par construction invariante dans $Cl-S$ et $Cl-Sdiag$.
- Un QC détermine les 2 transformations $Cl-S$ et $Cl-Sdiag$, ainsi que les hyperboles équilatères des figures 13 et 17. Mais il y a une infinité de QC inscrits dans la quartique ; ils ont en commun les points M , G et $M\delta$ ainsi que les transformations $Cl-S$ et $Cl-Sdiag$, les points O et N sont sur l'hyperbole équilatère de la figure 13 et les sommets du triangle diagonal sont sur l'hyperbole équilatère de la figure 17.



Troisième partie

Stelloïde cubique, hessienne, cayleyenne et courbes associées

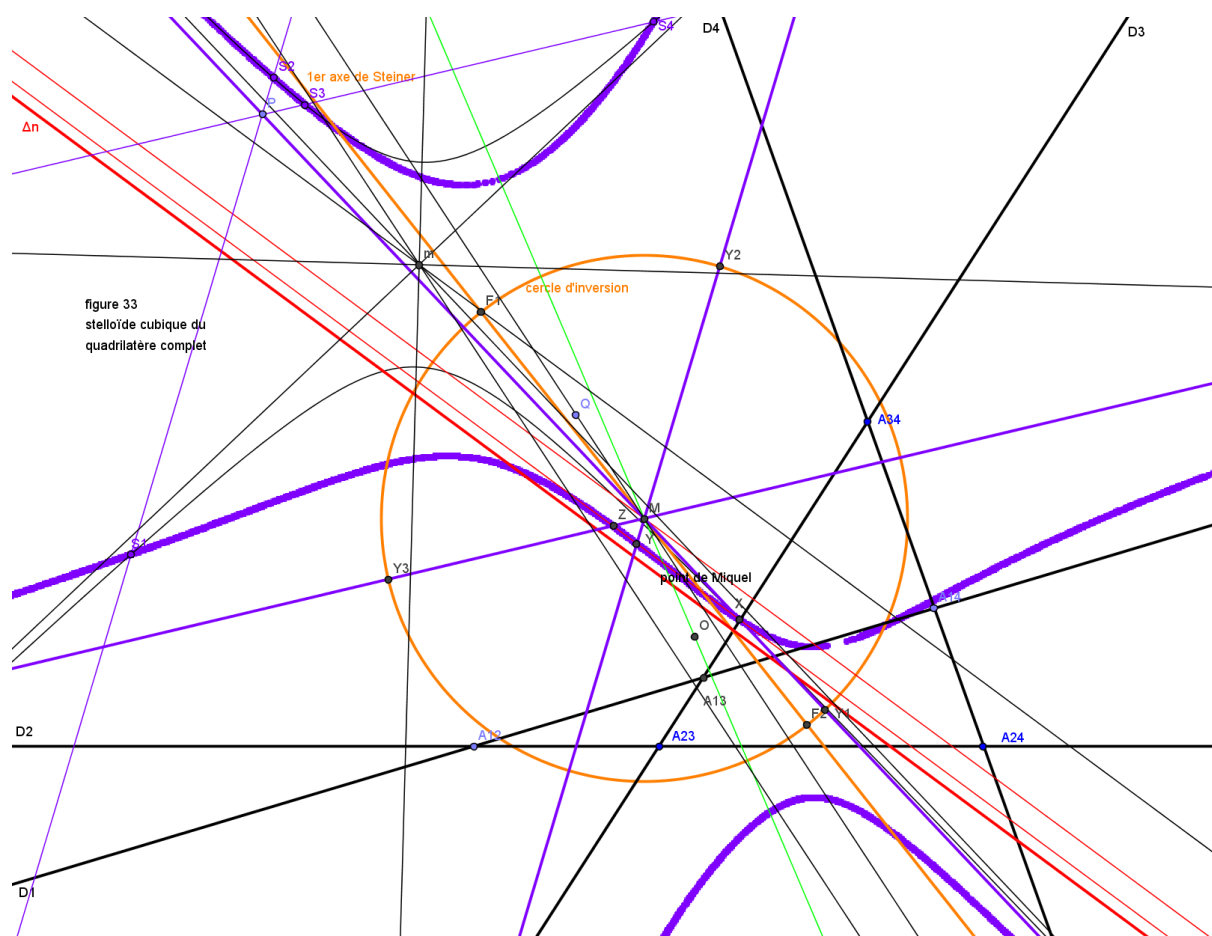


K) Stelloïde cubique de J. Marchand

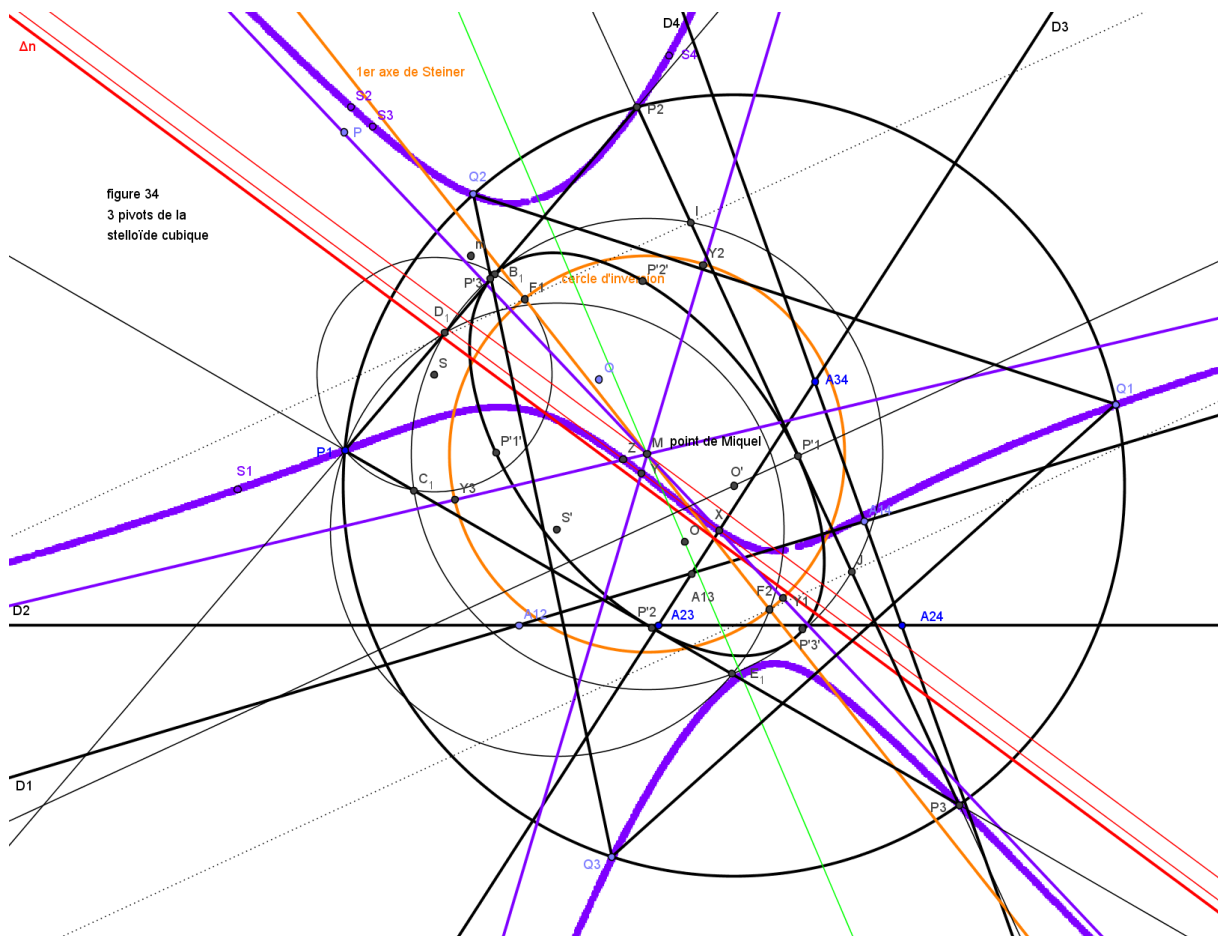
(figures 33, 34 et 35)

(cf E. Schmidt (26), B. Gibert (31) et J. Marchand (16))

- Une cubique est une courbe définie par une équation du 3^{ème} degré ; elle est coupée par une droite en 3 points.
- On a vu que la courbe lieu des centres des 27 multicroisioïdes tangentes aux 4 droites D_i était une cubique trouvée par Eckart Schmidt et étudiée par Bernard Gibert ; elle porte le nom de cubique de Eckart ou QL-Cu2 dans EQF.
- Bernard Gibert a montré que cette courbe coïncide en fait avec la stelloïde cubique conjuguée du QC décrite par Jules Marchand.
- Cette courbe a 3 asymptotes concourant au point M et faisant entre elles des angles de $\pi/3$; ces asymptotes trisentent l'angle orienté en M fait par l'axe de la parabole avec le 1^{er} axe de Steiner (ou l'angle fait par l'axe de la cardioïde avec l'axe de la parabole).
- La courbe recoupe ses asymptotes en 3 points alignés sur une parallèle à la droite de Newton Δ_n s'en déduisant dans une homothétie de centre M et de rapport 2/3.
- On utilise une construction fournie par Eckart Schmidt : pour un point P sur une asymptote, on détermine son conjugué Cl-S Q, le milieu m de PQ et on trace l'hyperbole équilatère de centre m, d'asymptotes parallèles aux bissectrices de l'angle entre MQ et l'axe de la parabole Mx et passant par le point fixe de l'asymptote choisie ; cette hyperbole équilatère coupe les parallèles aux asymptotes par le point P en 4 points autres que le point fixe S1, S2, S3 et S4 qui décrivent la SC lorsque P décrit l'asymptote.



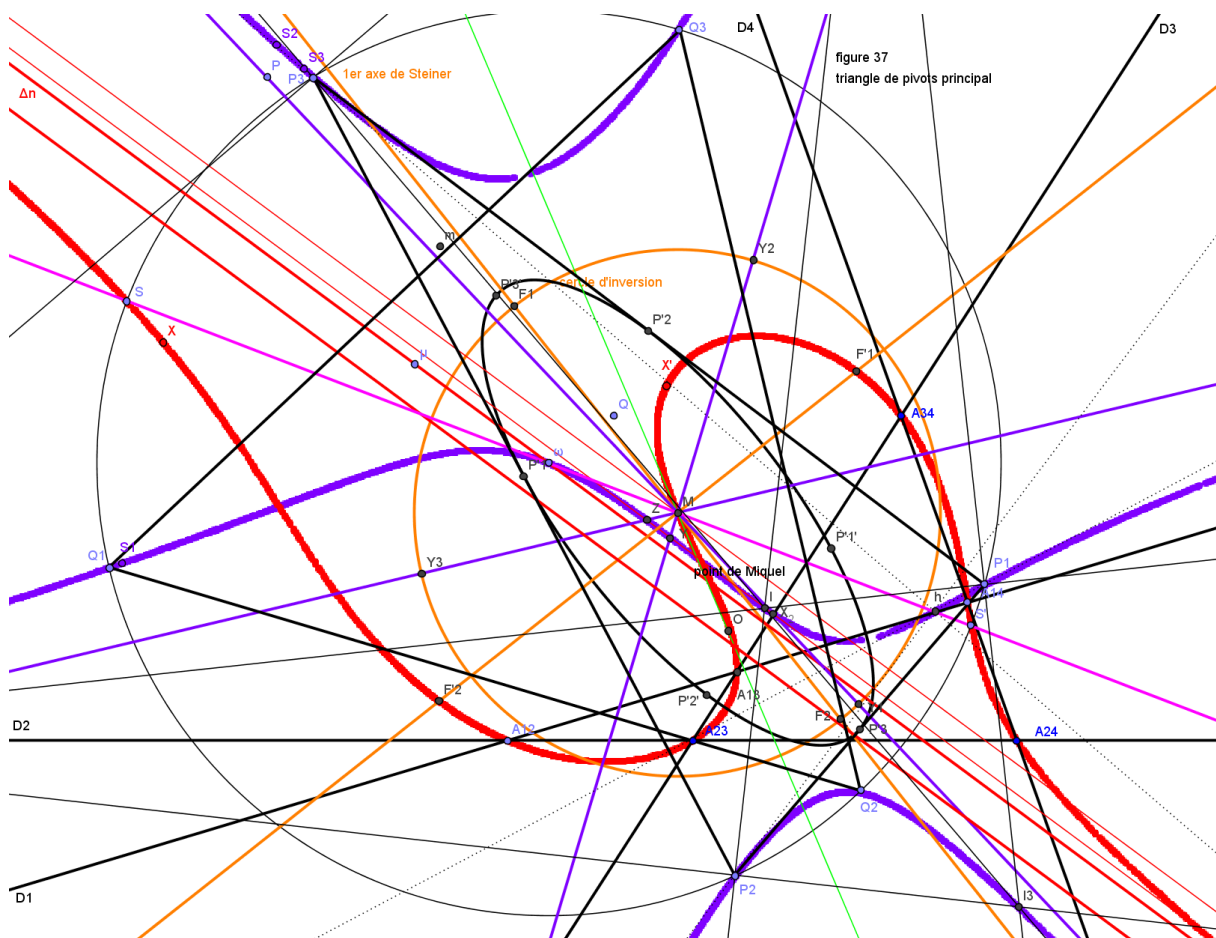
- La stelloïde de degré n est le lieu des points P tels que la direction moyenne des droites PA_i soit fixe, les A_i étant n points de la courbe constituant un polygone de référence.
- La stelloïde conique de degré 2 est l'hyperbole équilatère, lieu des points P tels que les bissectrices de l'angle (PP_1, PP_2) aient une direction fixe, P_1 et P_2 étant 2 points de l'hyperbole équilatère symétriques par rapport à son centre et la direction fixe étant celle des asymptotes orthogonales de la courbe.
- La stelloïde cubique de degré 3 est le lieu des points P tels que la direction moyenne des droites PP_1, PP_2 et PP_3 soit fixe, P_1, P_2 et P_3 étant 3 points pivots de la SC, leur isobarycentre étant le centre de la SC, point de concours de ses asymptotes, et la direction fixe étant celle des asymptotes, faisant entre elles des angles de $\pi/3$.
- On reprend ici une construction fournie par Bernard Gibert. Si P_1 est un point pivot choisi arbitrairement sur la courbe, on construit le point P'_1 tel que $MP'_1 = -1/2 MP_1$, la bissectrice intérieure de l'angle $\angle F_1P'_1F_2$ et l'ellipse de foyers F_1 et F_2 et tangente en P'_1 à cette bissectrice. Les 2 tangentes issues de P_1 déterminent les 2 autres pivots P_2 et P_3 , M est le centre de gravité du triangle $P_1P_2P_3$ et l'ellipse est l'ellipse de Steiner de ce triangle, tangente aux 3 côtés en leurs milieux.
- Le cercle de centre O' circonscrit à $P_1P_2P_3$ recoupe la SC en 3 points $Q_1Q_2Q_3$ sommets d'un triangle équilatéral.



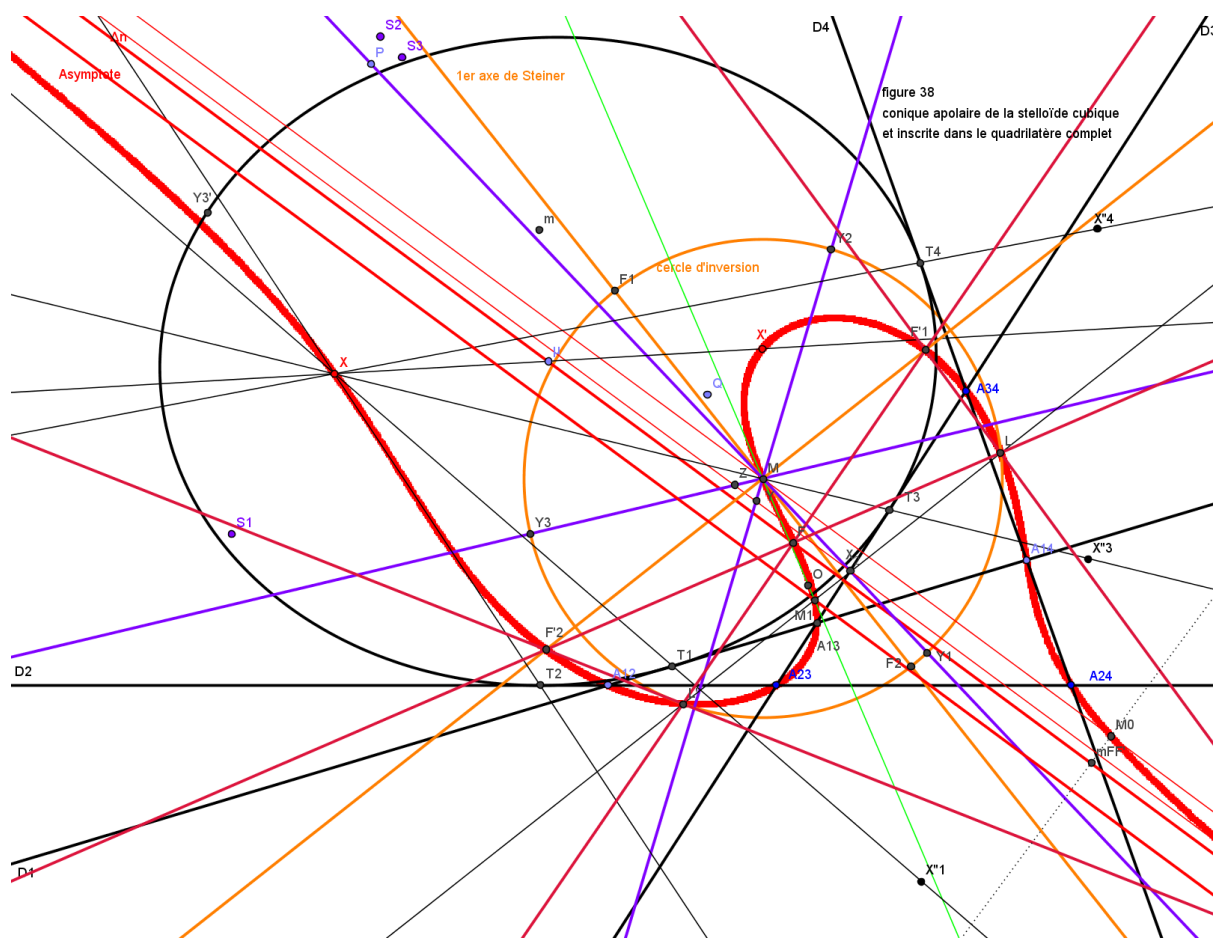
- Par tout point du plan, il passe en général 6 tangentes et la conique polaire de la cubique passe par les 6 points de contact (réels ou imaginaires).
- La SC a pour réseau ponctuel de coniques polaires l'ensemble des hyperboles équilatères qui coupent les 3 côtés du triangle diagonal, çàd les diagonales du QC, harmoniquement par rapport aux 2 sommets du QC portés par cette diagonale.
- Ces hyperboles équilatères coupent harmoniquement n'importe quelle diagonale d'un QC ayant même Cl-S et même droite de Newton Δ_n que le QC initial ; autrement dit, elles coupent n'importe quelle droite joignant 2 points conjugués Cl-S dont le milieu est sur Δ_n en 2 points conjugués harmoniques par rapport à ces 2 points.
- En particulier, elles coupent l'axe de la parabole en 2 points symétriques par rapport au point de Miquel M et plus généralement toute parallèle à la droite de Newton en 2 points dont le milieu est aligné avec le centre de l'hyperbole équilatère et le point M.
- Pour un point quelconque X, on mène les tangentes à la SC ; on appelle T1, T2, T3 et T4 les points de contact réels. La conique polaire du point est une hyperbole équilatère centrée au point X' conjugué Cl-S de X. On sait qu'elle coupe l'axe de la parabole Mx en 2 points W et W' symétriques par rapport à M ; les asymptotes de l'hyperbole équilatère se coupent orthogonalement en X' et coupent aussi Mx en 2 points E et E' symétriques par rapport à M, ce qui permet de les déterminer en traçant le cercle de centre M passant par X'.



- Si l'on reprend la construction de la figure 35 pour un point S de la hessienne, l'hyperbole équilatère dégénère en un couple de 2 droites orthogonales se coupant au point S' , conjugué Cl- S de S et recoupant la SC en 4 points $T1$, $T3$ et $T4$ alignés et $T2$.
- La connaissance de la hessienne permet de déterminer le triangle de pivots principal de la SC. La droite de Newton Δ_n coupe la SC en un point Ω ; $M\Omega$ est tangente à la SC en Ω et coupe la hessienne en 2 points S et S' . Le cercle de centre Ω passant par S et S' coupe la SC en 6 points $P1$, $P2$ et $P3$ et $Q1$, $Q2$ et $Q3$; $Q1Q2Q3$ est un triangle équilatéral. $P1P2P3$ est le triangle de pivots principal, son centre du cercle circonscrit est Ω sur la SC, son centre de gravité est M et son orthocentre H_{sc} est sur la SC. Mieux encore, les centres des cercles inscrits et exinscrits de ce triangle I , $I1$, $I2$ et $I3$ sont aussi sur la SC. On trace sans difficulté l'ellipse de Steiner de foyers $F1$ et $F2$.
- La forme de la SC et de la hessienne dépend de la position respective de la droite de Newton Δ_n et de l'axe de Steiner $F1F2$: si le point d'intersection de ces 2 droites se situe entre $F1$ et $F2$, la SC est formée de 3 parties indépendantes, dont 2 concaves tournées vers l'extérieur et une centrale plus allongée (type Mc Cay) et la hessienne est unicursale ; si le point d'intersection est à l'extérieur du segment, la SC est formée de 3 parties concaves tournées vers l'extérieur (type Kjp) et la hessienne est bicursale ; si le point d'intersection est $F1$ ou $F2$, les 2 courbes forment un nœud en ce point.
- La SC de la figure 37 est du 1^{er} type mentionné et sa hessienne est unicursale.

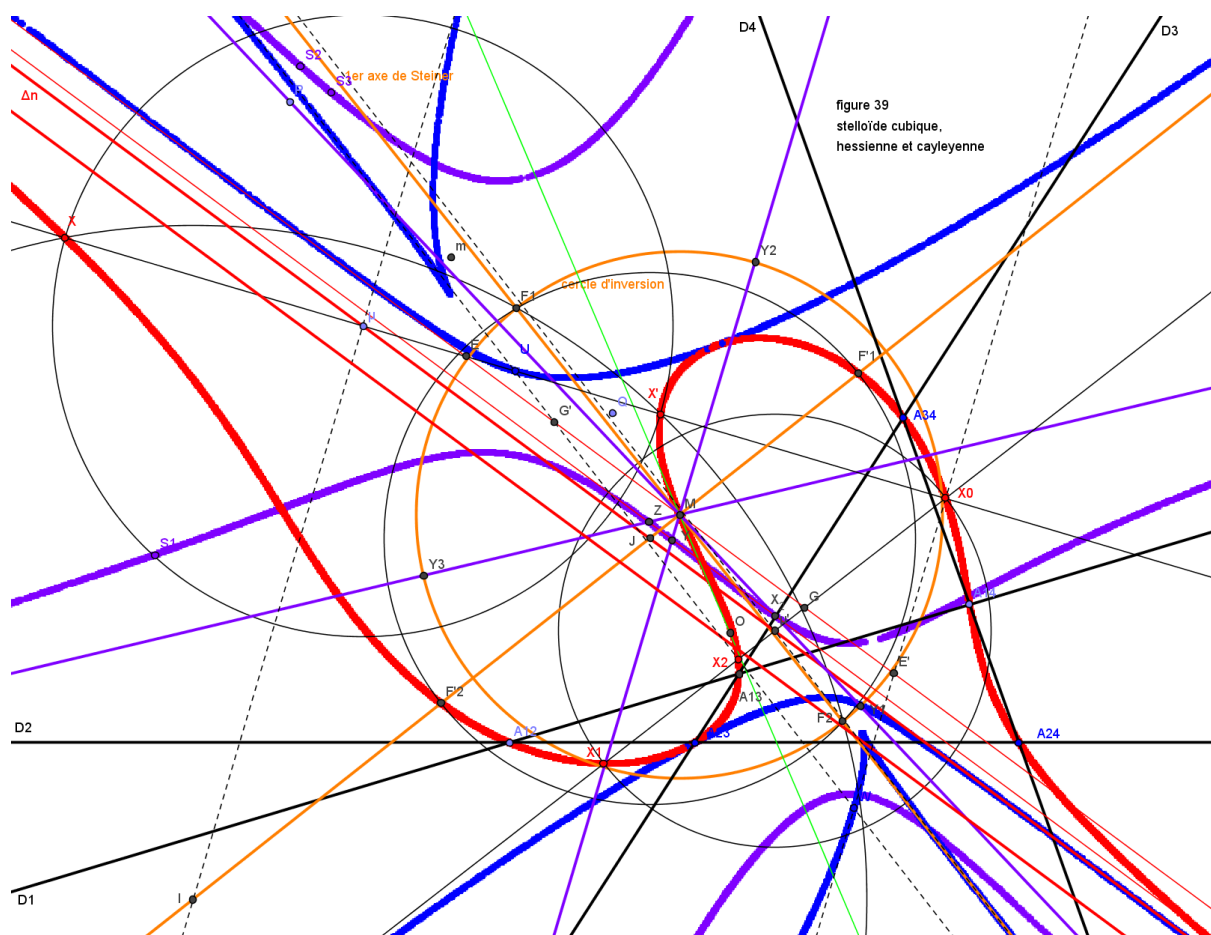


- La SC a pour réseau tangential de coniques apolaires l'ensemble des coniques inscrites dans le QC, çàd tangentes aux 4 droites Di. Ces coniques ont pour centres les points μ de la droite de Newton Δ_n , milieux des segments XX' , et pour foyers les couples de points X et X' conjugués Cl-S de la hessienne VR.
- Un QC détermine une transformation Cl-S et une droite de Newton et par conséquent une SC et une hessienne. Mais il existe une infinité de QC ayant la même SC : ils sont tous inscrits dans la hessienne et ont la même Cl-S et la même droite de Newton.
- Toute droite coupe la hessienne en 3 points réels ou imaginaires, dont les conjugués sont sur un cercle passant par M ; le cercle et la droite sont conjugués Cl-S et le centre du cercle est le conjugué Cl-S du symétrique de M par rapport à la droite.
- Pour tout point X de la courbe VR, on appelle tangential de X le point X_1 où la tangente en X recoupe la courbe. Deux points conjugués X et X' ont le même tangential X_1 et XX' recoupe la courbe au point X_0 conjugué de X_1 .
- Ainsi, la courbe VR coupe la droite de Newton en 2 points conjugués F et F' , dont le tangential est M ; le conjugué M' (second foyer de la parabole) de M est le point à l'infini de la droite de Newton et le tangential commun à M et M' est le point M_1 où la courbe VR recoupe son asymptote (M_1 est sur MO) ; le conjugué M_0 de M_1 est sur la parallèle à la droite de Newton menée par M (çàd l'axe de la parabole).
- La perpendiculaire par M_1 au 1^{er} axe de Steiner coupe le cercle d'inversion en 2 points L et L' ; le 2nd axe de Steiner coupe le cercle d'inversion en 2 points $F'1$ et $F'2$, qui sont 2 centres d'inversion de la hessienne VR (courbe anallagmatique).
- F, F' , L, L' , $F'1$ et $F'2$ constituent le QC principal de la hessienne.

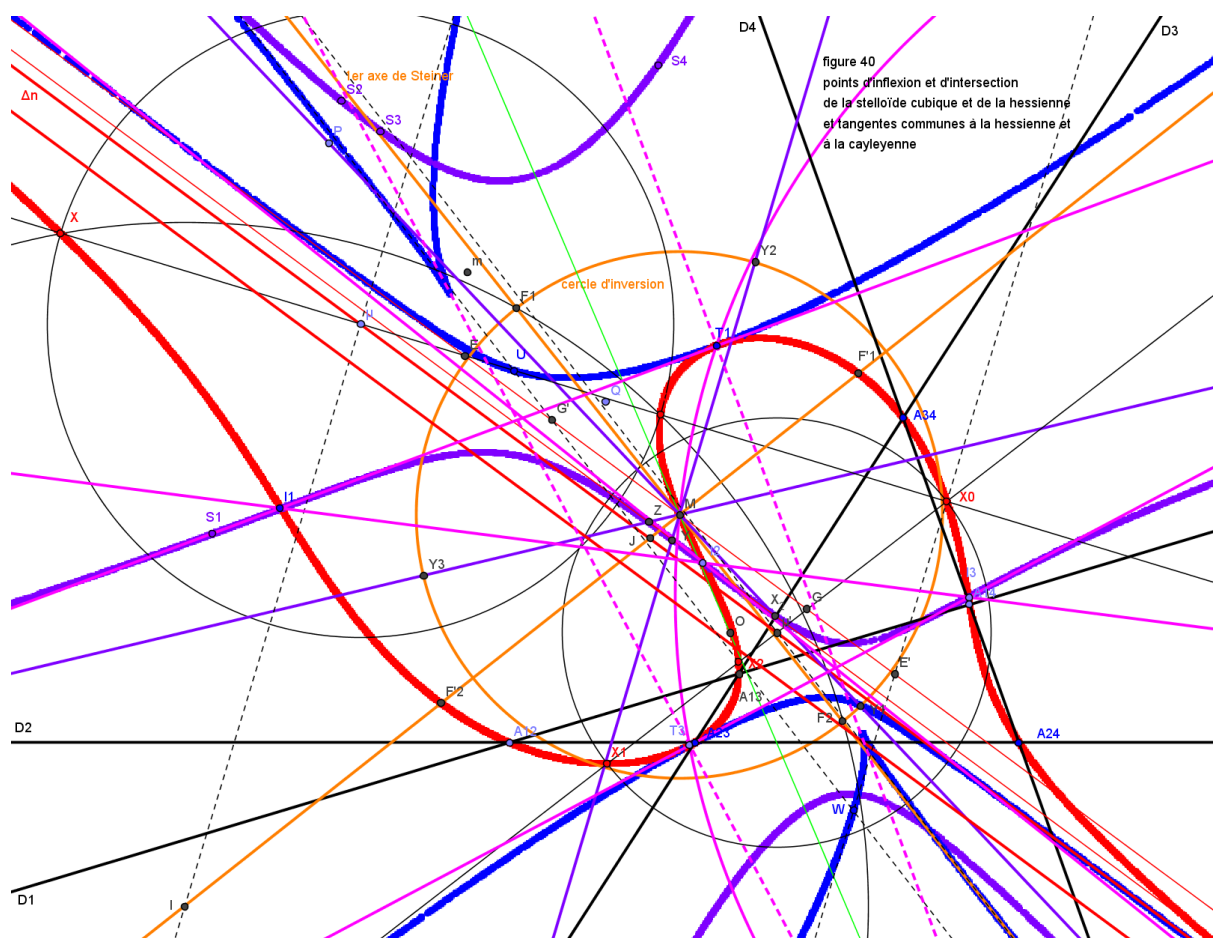


M) Cayleyenne (figures 39 et 40)

- Deux points conjugués d'une cubique ont le même tangentiel, point d'intersection situé sur la cubique des tangentes en ces 2 points ; ce point est le conjugué du 3^{ème} point d'intersection de la droite passant par ces 2 points avec la cubique.
- La cayleyenne d'une cubique est une sextique, enveloppe des droites constituant les coniques polaires dégénérées des points de la hessienne ; pour chaque droite passant par 2 points conjugués, le point de contact avec la cayleyenne est le conjugué harmonique du 3^{ème} point par rapport aux 2 points conjugués.
- La cayleyenne de la SC est la sextique enveloppant l'ensemble des droites perpendiculaires constituant les coniques polaires dégénérées de la hessienne VR ; elle enveloppe les axes des coniques inscrites, axe principal passant par 2 points conjugués Cl-S de la hessienne et axe secondaire, médiatrice du segment joignant ces 2 points.
- Pour tracer la cayleyenne de la SC, on part d'un couple de points conjugués de la hessienne X et X', de milieu μ sur Δn . On détermine le 3^{ème} point d'intersection X0 de la droite XX' avec la hessienne (on sait que XX' et la perpendiculaire à XX' en X0 coupent l'axe de la parabole en 2 points E et E' symétriques par rapport à M). Le point U conjugué harmonique de X0 par rapport à X et X' (inverse du point X0 par rapport au cercle de centre μ passant par X et X') appartient à la cayleyenne.
- On peut recommencer l'opération avec le point X0 et son conjugué X1 ; on détermine la 3^{ème} intersection X2 et le point V conjugué de X2 par rapport à X0 et X1. Enfin, la perpendiculaire en X0 à XX' est aussi tangente à la cayleyenne en un point W situé à l'intersection avec la perpendiculaire en X2 à X0X1.



- Une cubique a en général 9 points d'inflexion, dont au moins 1 est réel, les points imaginaires étant en nombre pair.
- La SC et la hessienne ont 3 points d'inflexion alignés I_1, I_2 et I_3 ; ce sont aussi leurs points d'intersection. Les conjugués Cl-S de ces 3 points sont les 3 points de tangence T_1, T_2 et T_3 entre la hessienne et la cayleyenne ; ils sont sur un cercle passant par M. On note que les points d'inflexion I_1, I_2 et I_3 sont à la fois les tangentiels et les conjugués Cl-S des points de tangence T_1, T_2 et T_3 .
- Les 3 tangentes communes à la hessienne et à la cayleyenne aux points de contact T_1, T_2 et T_3 déterminent un triangle dont l'orthocentre est le point de concours des 3 normales communes aux 2 courbes en ces 3 points, qui sont tangentes à la cayleyenne en ses points de rebroussement.
- Cette courbe étonnante a notamment comme tangentes les droites passant par un certain nombre de points conjugués Cl-S du QC déjà rencontrés : l'axe de la parabole, le point de contact étant le symétrique de M_0 par rapport à M, la droite de Newton Δ_n , le point de contact étant le milieu de FF' , le second axe de Steiner, le point de contact étant le conjugué harmonique de M par rapport à $F'1$ et $F'2$, la droite LL' , le point de contact étant le conjugué harmonique de M_1 par rapport à L et L' ...
- La forme de la cayleyenne dépend aussi de celle de la SC ; on a déjà mentionné que les figures décrites correspondent au 1^{er} type dit Mc Cay avec une hessienne unicursale. Pour une forme bicursale, on retrouve les 3 points d'inflexion et d'intersection de la SC et de la hessienne et leurs conjugués Cl-S comme points de tangence entre la hessienne et la cayleyenne ainsi que l'orthocentre du triangle des tangentes communes comme point de concours des normales en ces points tangentes à la cayleyenne en ses points de rebroussement.

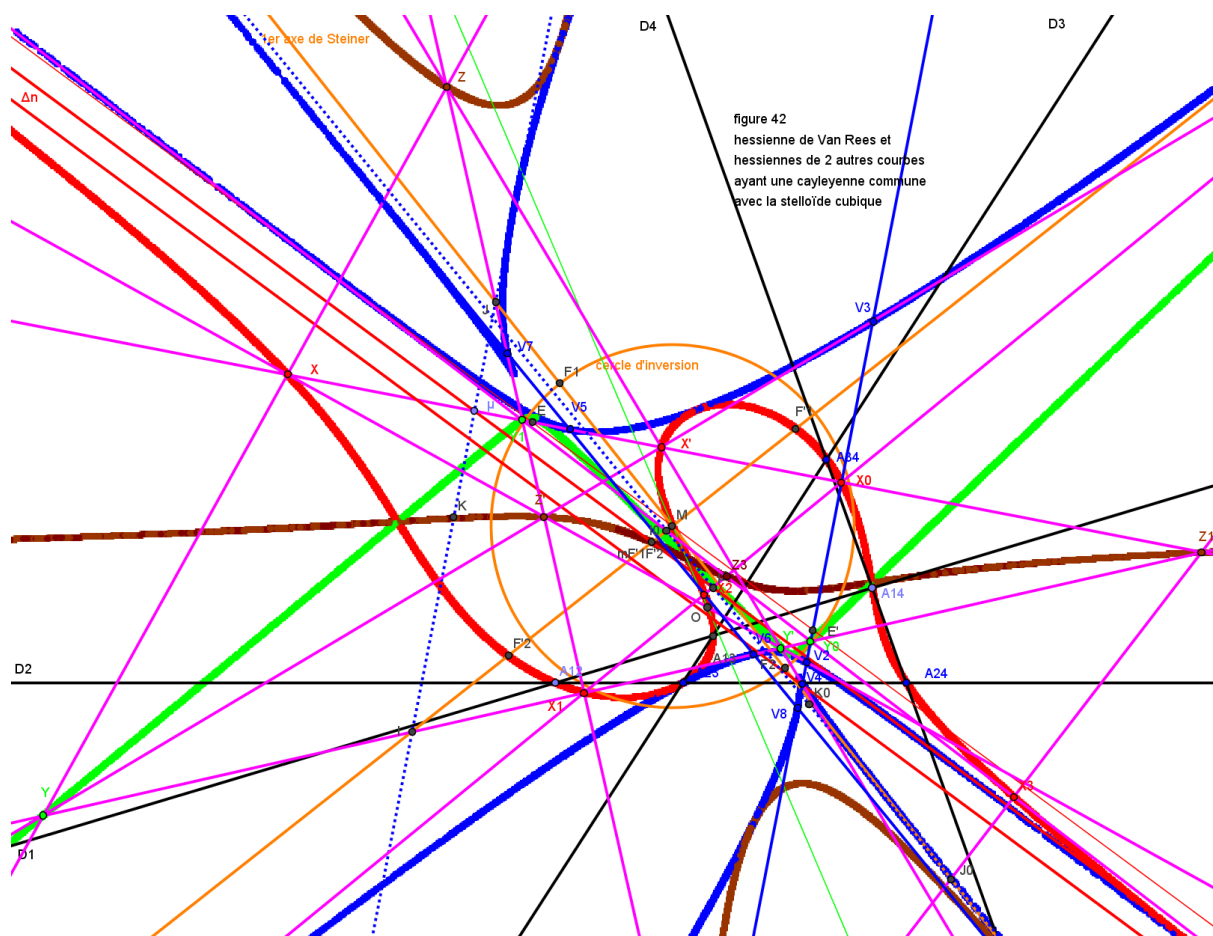


N) Courbes associées (figures 41 et 42)

- La figure 41 généralise la figure 7 : pour 2 points conjugués X et X' de la hessienne, on trace les bissectrices des angles $\angle F'1XF'2$ et $\angle F'1X'F'2$.
- Ces 2 couples de droites perpendiculaires constituent respectivement les coniques polaires des points X et X' ; ils se coupent en 4 points Y et Y' et Z et Z' qui constituent les pôles de la droite XX' . Tout point de la droite XX' a pour conique polaire une conique passant par ces 4 points.
- En particulier au point $X1$ d'intersection de YY' et ZZ' , la conique polaire dégénère en 2 droites orthogonales YY' et ZZ' qui constituent la conique polaire dégénérée du 3^{ème} point d'intersection $X0$ de XX' avec la hessienne. $X0$ et $X1$ sont à leur tour 2 points conjugués de la hessienne et la conique polaire dégénérée de $X1$ est constituée de la droite XX' et de la perpendiculaire en $X0$ à XX' .
- Y et Y' sont sur un cercle de centre I sur le 2nd axe de Steiner qui passe par X et X' et par $F1$ et $F2$; Z et Z' sont sur un cercle de centre J sur le 1^{er} axe de Steiner qui passe aussi par X et X' et est orthogonal au précédent. Ces 2 cercles constituent la généralisation des cercles de Steiner rencontrés pages 13 et 14. Les points Y , Y' , Z et Z' forment un quadrangle orthocentrique ; le cercle d'Euler commun aux 4 triangles passe par X , X' et $X1$ et par le point de Miquel M .
- Les 3 couples de points X et X' , Y et Y' et Z et Z' jouent un rôle symétrique : XX' et YY' se coupent en $Z1$, XX' et ZZ' en $Y1$ et la perpendiculaire en $X0$ à XX' coupe YY' en $Y0$ et ZZ' en $Z0$. $Y0$ et $Y1$ et $Z0$ et $Z1$ sont 2 couples de points conjugués.



- On peut bien sûr recommencer au tour suivant : Y_0, Y_1, Z_0 et Z_1 sont les 4 pôles de la droite X_0X_1 et on construit sans difficulté les points X_3, Y_3 et Z_3 intersections respectives de Y_0Y_1 et Z_0Z_1 , X_0X_1 et Z_0Z_1 et X_0X_1 et Y_0Y_1 et X_2, Y_2 et Z_2 leurs conjugués, X_2 étant la 3^{ème} intersection de X_0X_1 avec la hessienne et Y_2 et Z_2 étant les intersections respectives de la perpendiculaire en X_2 à X_0X_1 avec Y_0Y_1 et Z_0Z_1 .
- On a compris bien sûr que l'on peut mener de chacun des 2 points X et X' 2 tangentes à la cayleyenne orthogonales ; mais on peut aussi mener de chacun des 2 points Y et Y' et de chacun des 2 points Z et Z' 2 tangentes à la cayleyenne, ce sont les mêmes droites prises dans un ordre différent.
- On définit dès lors sur la perpendiculaire en X_0 à XX' , qui comprend déjà les points Y_0 et Z_0 intersections avec YY' et ZZ' , les 4 points V_1, V_2, V_3 et V_4 intersections avec $XYZ, XY'Z', X'YZ'$ et $X'Y'Z$ et sur la perpendiculaire en X_2 à X_0X_1 les 4 points V_5, V_6, V_7 et V_8 intersections avec XX', YY', ZZ' et $X_0Y_0Z_0$.
- Lorsque μ décrit la droite de Newton Δ_n , X, X', X_0, X_1, X_2 et X_3 décrivent la hessienne de la SC, Y, Y', Y_0, Y_1, Y_2 et Y_3 décrivent une 2^{nde} cubique et Z, Z', Z_0, Z_1, Z_2 et Z_3 une 3^{ème} cubique. Les 8 points V_1 à V_8 décrivent la cayleyenne de la SC.
- **La 2^{nde} et la 3^{ème} cubique sont les hessiennes de 2 autres cubiques qui ont la même cayleyenne que la SC.**
- Les mystérieux cercles de Steiner orthogonaux passant l'un par X, X', Y et Y' et F_1 et F_2 et l'autre par X, X', Z et Z' sont les cercles appartenant aux 2 réseaux des autopoloconiques communes à la SC et à la préhessienne de la 2^{nde} cubique ou communes à la SC et à la préhessienne de la 3^{ème} cubique.



Résumé et remarques

Le quadrilatère complet ou QC, formé par 4 droites D_i et leurs 6 points d'intersection A_{ij} , est une figure fascinante, étudiée en détail notamment par Jakob Steiner en 1827, par A. Miquel en 1838 et par F. Morley, comme cas particulier du n-droites, en divers articles de 1900 à 1929.

Un certain nombre d'articles et d'ouvrages ont été régulièrement consacrés au QC, en particulier par A. Oppermann en 1919, J.W. Clawson de 1917 à 1921 et plus récemment J.P. Ehrmann en 2004.

Le théorème de Kantor-Hervey ou des 4 médiatrices a été énoncé par S. Kantor en 1879 et démontré par F.R.J. Hervey en 1891 ; il a été repris par V. Thébault en 1944 et H.E. Fettes en 1948 et récemment par J.L. Aymé et A. Levelut en 2011.

L'approche barycentrique esquissée par L. Ripert en 1901 a été reprise de manière systématique et approfondie par C.A. van Tienhoven sur le site Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF, permettant au groupe Quadriforum de poursuivre ses travaux.

La stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet a été mentionnée par Jules Marchand en 1937, un siècle après Miquel ; elle a été redécouverte par Eckart Schmidt et étudiée par Bernard Gibert en 2014.

Au terme de cet article qui passe en revue le quadrilatère complet, ses courbes traditionnelles (parabole, deltoïde et cardioïdes) et d'autres, plus sophistiquées (stelloïde cubique, sa hessienne et sa cayleyenne), l'unité profonde de cette figure liée à la trisection de l'angle apparaît pleinement.

Un quadrilatère complet quelconque détermine une droite de Newton et une transformation Clawson-Schmidt, qui associe une inversion et une symétrie axiale ; elle est définie par 2 points invariants F_1 et F_2 de milieu M (le cercle d'inversion a pour centre M et passe par F_1 et F_2 et l'axe de la symétrie est le 1^{er} axe de Steiner F_1F_2 , la médiatrice de F_1F_2 étant le 2nd axe de Steiner). A l'inverse, une Cl-S et une droite Δ_n déterminent une infinité de QC inscrits dans la hessienne de Van Rees de la SC et dont les 6 sommets sont constitués de 3 paires de points conjugués Cl-S.

La somme des directions des 4 droites D_i des QC inscrits dans la hessienne VR par rapport à une direction fixe (droite de Newton) est constante ; on a $\sum \theta_i = Cte$.

Les QC partagent les propriétés suivantes, liées à la SC et à ses courbes associées :

- Les cercles circonscrits aux 4 triangles de référence T_i formés par ces droites prises 3 par 3 ont un point commun M , foyer de la parabole tangente aux 4 droites et appelé point de Miquel du QC.
- Ce point M et les centres O_i de ces cercles circonscrits sont sur un même cercle de centre O et de rayon r , appelé cercle de Miquel du QC ; ce cercle est le cercle intérieur d'une cardioïde tangente aux 4 cercles C_i , de centre O et de foyer M , transformée de la parabole dans la transformation Cl-S.
- Les orthocentres H_i des triangles T_i sont alignés sur une droite Δ_h , appelée droite de Steiner-Miquel du QC.
- Les milieux μ_{ij} des diagonales sont alignés sur une droite Δ_n , appelée droite de Newton du QC, qui passe par les milieux N de OH et N' de OH' .

- Les 16 centres des cercles inscrits et exinscrits des 4 triangles de référence sont sur 8 cercles de Steiner, dont 4 sont centrés sur le 2nd axe de Steiner et passent par F1 et F2 et 4 sont centrés sur le 1^{er} axe de Steiner.
- Les médiatrices des segments OiHi sont concourantes en un point H, centre du cercle de Hervey, orthocentre du QI formé par les Oi et appelé point de Kantor-Hervey du QC ; H se projette sur la directrice en un point H', barycentre des Hi et appelé point de Morley du QC.
- L'axe de la parabole tangente aux 4 droites Di est la parallèle par M à la droite de Newton et sa directrice est perpendiculaire à cette droite.
- Les axes de la deltoïde tangente aux 4 droites Di sont parallèles aux asymptotes de la SC et font un angle de $\frac{1}{3}\Sigma\theta_i$ m° $\pi/3$ avec l'axe de la parabole.
- La droite symétrique de cet axe par rapport à la droite de Newton est l'asymptote de la hessienne VR ; elle est tangente à la deltoïde.
- Le cercle inscrit dans la deltoïde est le cercle de Hervey, de centre H, symétrique du cercle de Miquel par rapport au point N.
- L'axe MO de la cardioïde tangente aux 4 cercles Ci fait un angle $\Sigma\theta_i$ avec l'axe de la parabole ; c'est le symétrique de l'axe de la parabole par rapport au 1^{er} axe de Steiner de la transformation Cl-S et la tangente en M à la hessienne.
- Les centres des 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites Di sont les intersections des maillages de Morley des 4 triangles Ti : ils appartiennent à la stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet ; ses asymptotes sont les trisectrices de l'angle entre les axes de la parabole et de la cardioïde (ou de l'angle entre le 1^{er} axe de Steiner et l'axe de la parabole).

Si l'on considère un QC et 2 coniques inscrites dans ce QC, l'ensemble des QC inscrits dans la hessienne VR est déterminé par les 4 tangentes communes à 2 coniques confocales des 2 coniques inscrites (elles ont par construction leurs foyers sur la hessienne et leurs centres sur la droite de Newton).

- La SC conjuguée du QC a comme réseau tangentiel de coniques apolaires l'ensemble des coniques inscrites dans le QC ; leurs foyers sont sur la hessienne VR et leurs centres sur la droite de Newton Δ_n .
- Elle a comme réseau ponctuel de coniques polaires l'ensemble des hyperboles équilatères qui coupent harmoniquement tous les segments joignant 2 points conjugués Cl-S ; elles coupent la droite portant ces 2 points en 2 autres points conjugués harmoniques par rapport aux 2 premiers.
- La hessienne VR est le lieu des points pour lesquels les coniques polaires dégénèrent en un couple de droites perpendiculaires ; elle est aussi le lieu des foyers des coniques inscrites qui sont 2 points conjugués Cl-S.
- La cayleyenne est l'enveloppe de l'ensemble des droites perpendiculaires constituant les coniques polaires dégénérées des points de la hessienne ou des axes des coniques inscrites, axe principal passant par 2 points conjugués Cl-S de la hessienne et axe secondaire, médiatrice du segment joignant ces 2 points.
- La cayleyenne de la SC est aussi par construction celle de 2 autres cubiques.
- L'ensemble des cercles passant par 2 points conjugués de la hessienne et centrés sur l'un des 2 axes de Steiner généralisent les cercles de Steiner et appartiennent aux 2 réseaux d'autopoloconiques de la SC, communes à la SC et à l'une ou l'autre des 2 cubiques ayant la même cayleyenne.

Tableau des éléments remarquables

Nature	Légende	Nom	EQF	Propriété	Conjugué CI-S
Points	Aij	6 sommets du QC	$Li^{\wedge}Lj$	2 à 2 conjugués CI-S	Akl autre sommet
	Oi	4 centres des Ci		sur cercle de Miquel	symétrique de M/Di
	Hi	4 orthocentres des Ti		alignés sur droite Δh	
	hi	4 orthocentres des ti		symétriques des Oi/N	
	$\mu_{ij} = \mu_{kl}$	milieu de AijAkl		alignés sur droite Δn	
	M	point de Miquel	P1	point des Ci et de C	point à l'infini
	O	centre centrique	P4	centre de cercle Cm	
	H	point de Kantor-Hervey	P3	sur 4 médiatrices d'Euler	
	H'	point de Morley	P2	barycentre des Hi	
	N	centre de Clawson	P5	milieu de OH - sur Δn	
	N'		P22	milieu de OH' - sur Δn	
	Ba	barycentre du QC	P12	sur droite de Newton	
	G	point Dimidium	P6	barycentre des Oi	
	G'			barycentre des hi	
	NS	point Newton-Steiner	P7	intersection Δn et Δh	
	G δ		P8	centre de gravité de DT	
	O δ		P9	centre cercle circon de DT	
	H δ		P10	orthocentre de DT	
	N δ		P11	centre cercle Euler de DT	
	P et P'	points de Plücker	2P1	cercles diamètre AijAkl	Q et Q'
	Q et Q'		2P4	cercle de Miquel	P et P'
	D1 à D4	points D		sur le cercle Dimidium	
	P1 à P4	centres de perspective		M, Di et Pi alignés	
	S1 à S3	points S		sur le cercle Dimidium	
	M1	tangentiel de M sur MO		asymptote et hessienne	M0
	F1 et F2	invariants CI-S	2P3	1er axe de Steiner	F1 et F2
	F'1 et F'2			centres inversion de Cu1	F'2 et F'1
	F et F'		2P2	Δn et hessienne	
	F1 δ et F2 δ	invariants CI-Sdiag		sur Δh , QQ' et CI-S(Dimid)Cw	
	ω			cercles Cm, Cp et Cd	ω
	C ω				

Tableau des éléments remarquables

Nature	Légende	Nom	EQF	Propriété	Conjugué Cl-S
Droites	Di	4 droites du QC			cercle Ci
	Δn	Newton	L1	milieux diagonales	cercle par M, F et F'
	Δh	Steiner M/Ti	L2	directrice de parabole	cercle Cm
	δ	Simson M/Ti	L3	tgte sommet de parab	cercle tgt à cardioïde
	H'H δ		L4	directrice de parabolediag	
Triangles	Ti	4 triangles de référence	CT		
	ti	4 triangles OjOkOl			
	t'i	4 triangles hjhkh		symétriques de ti/N	
	$\alpha\beta\gamma$	1er diagonal	DT	perspective avec Ti	
	$\lambda\mu\nu$	2nd diagonal	DDT	perspective avec ti	
Cercles	Ci	4 circonscrits aux Ti		point commun M	droite Di
	Cm	Miquel	Ci3	centre O par les Oi	droite Δh
	Ch	Hervey	Ci4	centre h par les hi	
	Cp	Plücker	Ci5	centre N par M, P et P'	droite QQ'
	Cd	Dimidium	Ci6	centre G par M et les S	droite Kw
Coniques		Parabole	Co1	tangente aux 4 Di	cardioïde de Morley
		Parabole associée	Co2	par 4 points de tgce	
	Γi	4 isogonales de KiCoPi		par les 3 points S	
	$\Gamma' i$	3 coniques des 9 points		par les 3 points S	
	$\Gamma \delta$	isogonale de K δ CoP δ		par les 3 points S	
Cubiques	27 points	stelloïde cubique	Cu2	centres des cardioïdes	
		hessienne de Van Rees	Cu1	6 sommets et M	invariante
		2 autres hessiennes		même cayleyenne que Cu2	
Quartiques	Deltoïde	Kantor-Hervey	Qu1		
	Cardioïde	Morley	Qu2	tangente aux 4 Ci	parabole tgt aux 4 Di
	Cardioïdes	points de Plücker généralisés	27Qu1	tangentes aux 4 Di	
Sextique		Cayleyenne de la SC		commune à 3 cubiques	

Bibliographie

(On trouvera dans les articles de Jean-Pierre Ehrmann, John Wentworth Clawson et Jean-Louis Aymé et sur le site de Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadricenters de nombreuses autres références non reprises)

Pères fondateurs

- (1) J. Steiner 1827 Théorème sur le Quadrilatère Complet Annales de Gergonne
- (2) Van Rees 1829 Mémoire sur les focales
- (3) A. Miquel 1838 Théorèmes de géométrie Journal de mathématiques de Liouville

Anciens

- (4) Laguerre 1878 Sur la cardioïde et 1879 Sur quelques propriétés de la H3
- (5) S. Kantor 1879 Quelques théorèmes nouveaux sur la H3
- (6) F.R.J. Hervey 1891 problem 10088 and solution Mathematical questions and solutions from the Educational Times (reproduit dans l'article de J.L. Aymé)
- (7) Frank Morley 1900 On the metric geometry of the plane n-line
1902 Orthocentric properties of the plane n-line
1907 On reflexive geometry
1929 Extensions of Clifford's Chain Theorem
1929 Inversive Geometry
- (8) Léon Ripert 1901 Notes sur la géométrie du quadrilatère
- (9) J. Lemaire 1913 et 1918 Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements (repris et développé dans l'ouvrage réédité en 1967 Hypocycloïdes et épicycloïdes Blanchard)
- (10) R. Goormaghtigh 1914 Mathesis (article cité par A. Oppermann et J.P. Ehrmann)
- (11) Sister Mary Gervase 1917 On the cardioïds fulfilling certain assigned conditions Catholic University of America
- (12) A. Oppermann 1919 Premiers éléments d'une théorie du QC Gauthiers-Villars
- (13) J.W. Clawson 1917 Points, Lines and Circles connected with the QC
1919 The complete Quadrilateral
1921 More theorems on the Complete Quadrilateral
- (14) R. Bricard 1923 Sur les droites moyennes d'un triangle
- (15) Paul Smith Wagner 1929 An extension to Clifford's chain

Modernes

- (16) Jules Marchand 1937 Géométrie du quadrilatère complet Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
- (17) Victor Thébault 1944 Sur le point de Kantor-Hervey et 1954 Concerning the QC
- (18) R. Goormaghtigh 1947 The Hervey point of the general n-line
- (19) Henry E. Fettis 1948 The complete quadrilateral
- (20) Général Marmion 1956 Epi- ou hypocycloïdes semblables tangentes à 2,3 ou 4 droites Mathesis

Contemporains

- (21) André Viricel Le théorème de Morley A.D.C.S. 1993
- (22) Alex Bogomolny 1998 Doodling and Miracles - Morley's Pursuit of Incidence
1999 Lines, Circles and Beyond – On Motivation and Understanding
- (23) Jean-Pierre Ehrmann 2004 Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral
- (24) D. Roux et M. Tixier, 3 articles sur les cubiques, configurations de Reyes et involutions quadratiques dans Quadrature numéros 46, 47 et 65
- (25) Jean-Pierre Ehrmann and Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane
- (26) Eckart Schmidt Das Steiner Dreieck von vier Punkten
Miquel-, Poncelet- und Bennett Punkt eines Vierecks
Geometrie auf der Zirkularkurve
- (27) Quadrature (problème numéro E274 des 4 médiatrices posé par F. Gaspalou dans le numéro 64 de la revue et solution de J.N. Pasquay publiée dans le numéro 73)
- (28) Jean-Louis Aymé 2003 Méthodes et techniques en géométrie ; à propos de la droite de Newton et 2011 Le point de Kantor-Hervey
- (29) Alain Levelut 2011 A Note on the Hervey Point of a Complete Quadrilateral
- (30) Bernard Keizer 2013 La Géométrie du Quadrilatère Complet
- (31) Bernard Gibert 2013 Inscribed Cardioïds and Eckart Cubics

Ouvrages généraux

- (32) R. Cuppens Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-géomètre II
Bulletins de l'APMEP n° 124 et 125
- (33) T. Lalesco La géométrie du triangle Vuibert 1952
- (34) H. Brocard et T. Lemoyne Courbes géométriques remarquables Vuibert 1919
- (35) J.D. Eiden Géométrie analytique classique Calvage et Mounet 2009
- (36) G. Salmon Traité de géométrie analytique : courbes planes 1884

Sites Internet

- <http://bernardkeizer.blogspot.fr>, article de Bernard Keizer
- www.forumgeom.fau.edu, site Forum Geometricorum, articles de Jean-Pierre Ehrmann et Alain Levelut
- www.jl.ayme.pagesperso-orange.fr, articles de Jean-Louis Aymé
- www.numdam.org, site d'articles numérisés de la Bibliothèque Nationale de France : articles de Bricard, Kantor, Laguerre, Lemaire et Steiner
- <http://retro.seals.ch/stelloïde> cubique, article de Jules Marchand
- www.mathworld.wolfram.com, site de mathématiques de référence de Eric Weisstein
- www.cut-the-knot.org, articles de Alex Bogomolny
- www.faculty.evansville.edu, Encyclopedia of Triangle Centers - ETC, site de Clark Kimberling consacré aux points remarquables du triangle
- www.chrisvantienhoven.nl, Encyclopedia of Quadri-Figures, site de Chris van Tienhoven consacré aux points, lignes, courbes et transformations remarquables des quadrangles et quadrilatères
- www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr, site de Bernard Gibert consacré aux cubiques
- www.eckartschmidt.de, articles de Eckart Schmidt

*« On a compris déjà que Sisyphe est le héros absurde.
Il l'est autant par ses passions que par ses tourments.
Son mépris des dieux, sa haine de la mort et sa passion
pour la vie lui ont valu ce supplice indicible où
tout l'être s'emploie à ne rien achever »*

Albert Camus Le mythe de Sisyphe