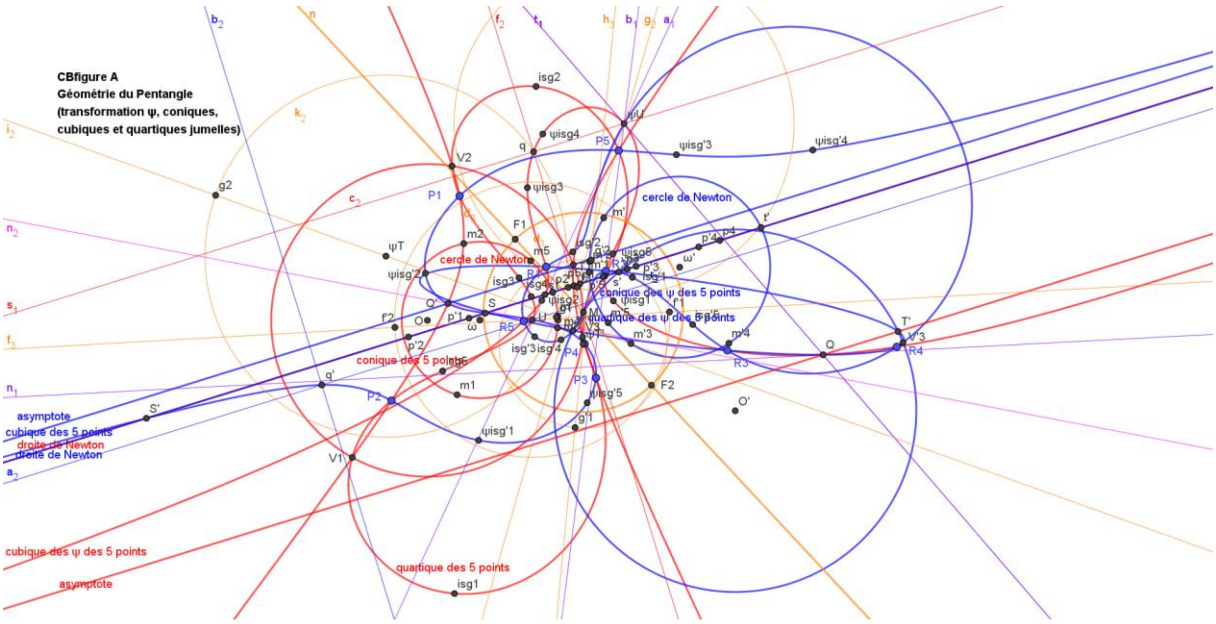
Bernard Keizer
(bernard.keizer@wanadoo.fr)

Le Buy (Dordogne 24), décembre 2019

Récréations sur le Quadrangle
et
le Quadrilatère Complets

Transformation de Cayley-Bacharach
de 7 points réels ou de
5 points réels et 2 points circulaires

Géométrie du Pentangle
(transformation ψ, coniques,
cubiques et quartiques jumelles)



Résumé

Un QA conduit à 3 QC et un QC à 3 QA. Le QA a 2 cubiques circulaires remarquables, pivotale et orthopivotale et le QC possède la cubique circulaire focale de Van Rees. L'étude des intersections des 3 cubiques circulaires focales de Van Rees des 3 QC du QA et des 3 cubiques circulaires pivotales ou orthopivotales des 3 QA du QC débouche sur la transformation de Cayley-Bacharach de 7 points réels ou de 5 points réels et 2 circulaires. On découvre enfin la géométrie du pentangle avec la transformation ψ et les coniques, cubiques et quartiques jumelles.

Abstract

A QA leads to 3 QLs and a QL to 3 QAs. The QA has 2 remarkable circular cubics, pivotal and orthopivotal and the QL owns the circular focal Van Rees cubic. The study of the intersections of the 3 circular focal Van Rees cubics of the 3 QLs of the QA and of the 3 pivotal or orthopivotal circular cubics of the 3 QAs of the QC ends on the Cayley-Bacharach transformation of 7 real points or of 5 real points and 2 circular points. Last, we discover the geometry of the pentangle with the ψ transformation and the twin conics, cubics and quartics.

Zusammenfassung

Ein VE führt zu 3 VS und ein VS zu 3 VE. Das VE hat 2 merkwürdige zirkulare Kubiken, eine pivotal und die andere othopivotal und das VS besitzt die zirkulare fokale Van Rees Kubik. Die Untersuchung der Schnittpunkte der 3 zirkularen fokalen Van Rees Kubiken der 3 VS des VE und der 3 pivotalen oder orthopivotalen zirkularen Kubiken der 3 VE des VS endet mit der Cayley-Bacharach Transformation von 7 realen Punkten oder von 5 realen Punkten und 2 zirkularen Punkten. Am Ende entdecken wir die Geometrie des Fünfeckes mit der ψ Transformation und den Zwillings-kegelschnitten, -kubiken und -quartiken.

Introduction

J'avais pourtant décidé de mettre fin à la rédaction d'articles (*) consacrés au QA et au QC sur mon blog. Mais après plus d'un an de recherches communes avec Eckart Schmidt sur le Quadriforum, je considère que les résultats trouvés méritent d'être formalisés. Après quelques rappels nécessaires et une description des applications utiles, il est possible de décrire la transformation de Cayley-Bacharach de 7 points réels ou de 5 points réels et 2 circulaires ainsi que les rudiments de la géométrie du pentangle avec une transformation ψ associée à 5 points réels, conduisant à son tour à une cubique circulaire et une quartique bicirculaire, caractéristiques de ces 5 points. (Geogebra permet de tracer sans difficulté de telles courbes).

(*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013
Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014
Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique et la transformation ψ 2015
Le Quadrangle et le Quadrilatère Complets comme figures duales et leurs isocubiques 2016
Un joli puzzle géométrique 2017
Cayley-Bacharach, Marden et Siebeck 2018
http://bernardkeizer.blogspot.com/

Sommaire

Figures

A) Géométrie du Pentangle (transformation ψ, coniques, cubiques et quartiques jumelles)

1) QA, 3 QC et DT
2) QC, 3 QA et DT
3) QA et isocubiques circulaires (pivotale et orthopivotale)
4) QC, transformation ψ et cubique circulaire focale de Van Rees
5) Théorème de Cayley-Bacharach et faisceau de cubiques passant par 8 points

6) QA, 3 QC et 3 cubiques circulaires focales de Van Rees
7) QC, 3 QA et 3 isocubiques circulaires pivotales
8) QC, 3 QA et 3 isocubiques circulaires orthopivotales

9) Transformation de Cayley-Bacharach de 7 points réels (cubique de pivot P)
10) Construction du CB point de 8 points réels

11) CB transformation des 7 points du QA A', B, B', C, C', Q et R
12) CB transformation des 7 points du QC A, A', B, B', C, C'et M
13) CB transformation des 7 points du QC X1, X2, X3, X4, X5 et U1 et V1

14) Transformation de Cayley-Bacharach de 5 points réels et 2 points circulaires (cubique de pivot P)
15) Construction du cb point de 6 points réels et 2 points circulaires

16) Conique de 5 points et 5 isocubiques pivotales associées
17) Transformation ψ de 5 points et point M
18) Cubique et quartique associées et points U, ψU et ψT

19) cb transformation de 4 points et leur point isogonal
20) cb transformation des 5 points triples du QC et points M, U, T et R
21) 3 isocubiques orthopivotales et 3 isocubiques circulaires des 5 points triples
22) 6 autres isocubiques circulaires des 5 points triples

Ces figures ont été réalisées avec Geogebra version 5.0

Remerciements

Mes remerciements vont d'abord aux 3 maîtres qui m'ont permis de mener à bien cette aventure : Clark Kimberling pour le triangle (*), Chris van Tienhoven pour le QA/QC (**) et Bernard Gibert pour les cubiques (***). Ils vont ensuite en particulier à Eckart Schmidt (****) avec lequel nous avons partagé ces recherches et découvertes liées aux propriétés du pentangle.

(*) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC www.faculty.evansville.edu
(**) Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF www.chrisvantienhoven.nl
(***) Bernard Gibert Cubics in the Triangle Plane https://bernard-gibert.pagesperso-orange.fr
(****) Eckart Schmidt http://eckartschmidt.de

EQF est complété par une partie Encyclopedia of Polygon Geometry ou EPG et le site du forum https://groups.io/g/Quadri-and-Poly-Geometry contient 3 liens vers ETC, EQF et EPG.

A. Rappels nécessaires

1) QA, 3 QC et DT
(figure 1)

On part d'un QA de 4 points B, B', C et C' ; son DT est AA'T1.

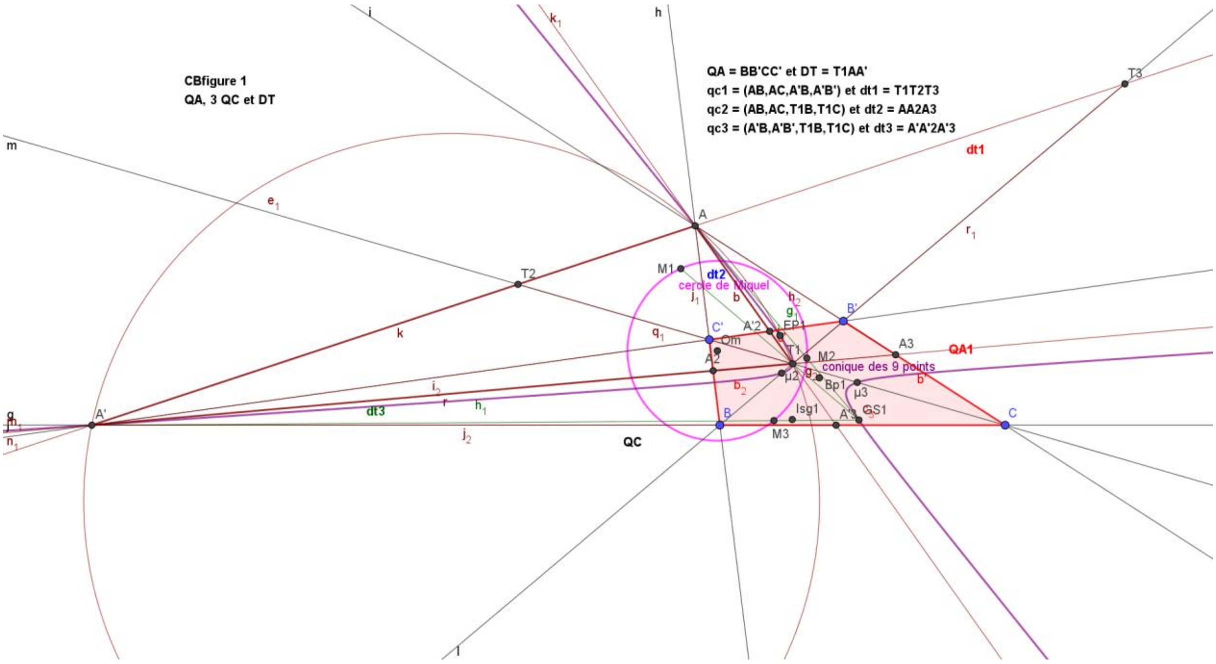
On identifie la conique des 9 milieux des côtés et les points d'Euler-Poncelet EP et de Gergonne-Steiner GS et leur milieu, barycentre Bp des 4 points.

Ce QA conduit à 4 QC :

- qc1, les 4 droites étant AB, AC, BC et B'C' ; son dt1 est T1T2T3
- qc2, les 4 droites étant AB, AC, T1B et T1C ; son dt2 est AA2A3
- qc3, les 4 droites étant BC, B'C', T1B et T1C ; son dt3 est A'A'2A'3

Les points de Miquel des 3 qc sont les sommets M1, M2 et M3 du triangle de Miquel du QA et on vérifie les alignements GS1M1T1, GS2M2A et GS3M3A'.

Bien sûr, qc1 est le QC du paragraphe suivant.



2) QC, 3 QA et DT
(figure 2)

On part d'un QC de sommets A, A', B, B', C et C', les 4 droites étant AB, AC et BC et la cévienne par A' (sur BC), B' (sur AC) et C' (sur AB) ; son DT est T1T2T3.

Le point de Miquel M est à l'intersection des 4 cercles circonscrits à ABC, AB'C', A'C'B et A'B'C.

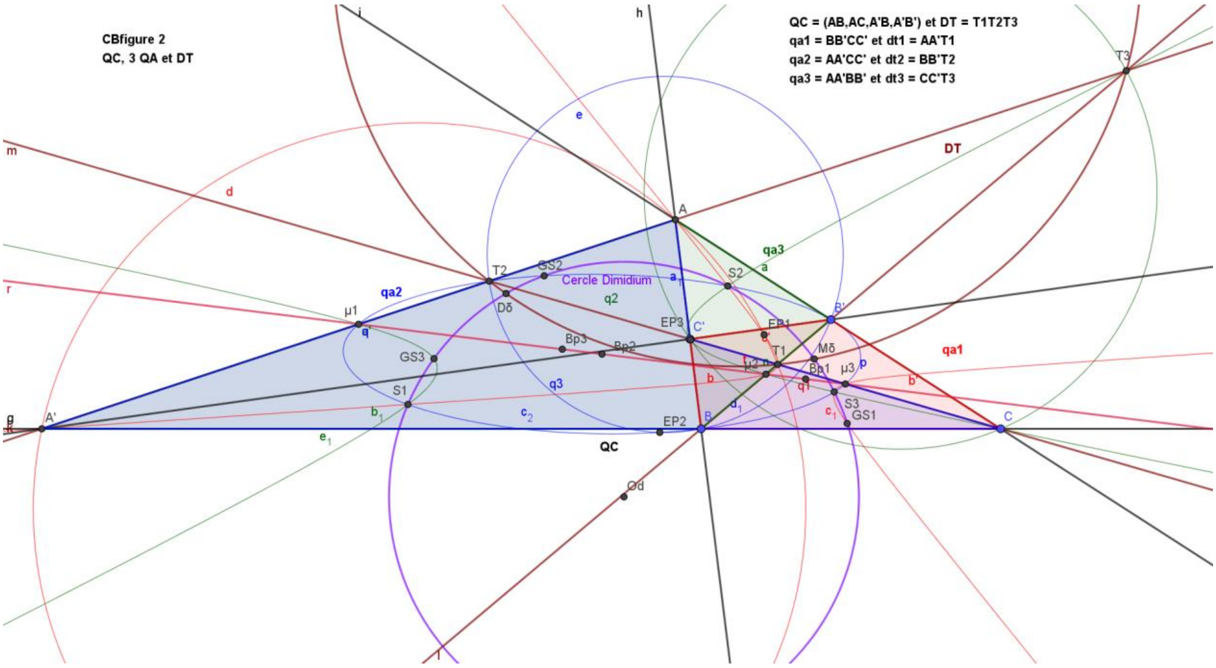
Ce QC comprend 4 QA :

- qa1 de sommets B, B', C et C' et de dt1 AA'T1
- qa2 de sommets A, A', C et C' et de dt2 BB'T2
- qa3 de sommets A, A', B et B' et de dt3 CC'T3

Le point M est l'un des 3 sommets des 3 triangles de Miquel des 3 QA et on vérifie les alignements MGS1T1, MGS2T2 et MGS3T3.

Bien sûr encore, qa1 est le QA du paragraphe précédent.

Les coniques des 9 milieux des côtés des 3 qa se coupent 2 à 2 en 4 points, dont 3 sont les points triples S1, S2 et S3. Le cercle circonscrit à ces 3 points passe par le point M et les 3 points GS1, GS2 et GS3. Il coupe le cercle circonscrit à DT en 2 points Dδ et Mδ.



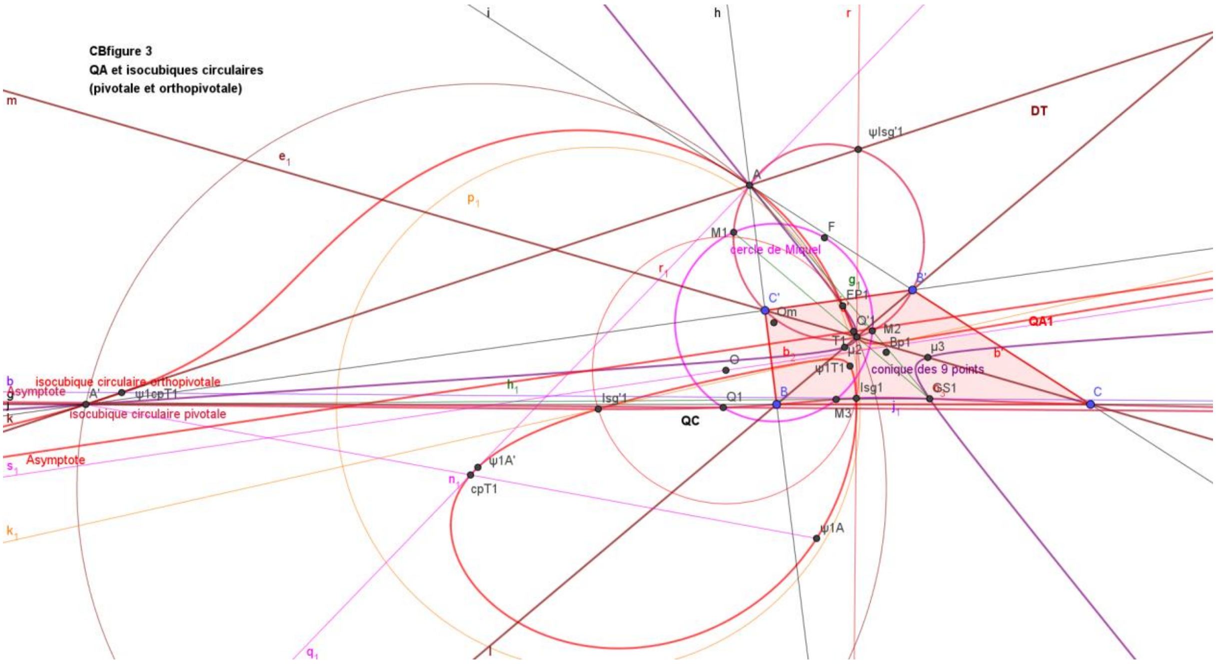
3) QA et isocubiques circulaires (pivotale et orthopivotale) (figure 3)

Pour un QA,la transformation φ associe à un point du plan le point de concours de ses polaires par rapport aux coniques circonscrites (Isg' est le transformé φ de Isg).

On définit 2 isocubiques circulaires de pivot Isg et isopivot Isg' :

- pivotale, lieu des intersections de toutes les droites passant par Isg avec les coniques qui sont leurs transformées φ (elles passent par Isg').
  Cette cubique passe notamment par les 4 sommets du QA, les 3 sommets de DT et par les points GS, Isg et Isg', par les 3 sommets du triangle de Miquel (points de Miquel des 3 qc) et par les sommets du triangle cévien de Isg par rapport à DT.
  Elle coupe son asymptote, parallèle à GSIsg, en un point Q, situé sur le cercle de Miquel (4$^{\text{ème}}$ intersection de ce cercle avec la cubique) ; son foyer F est le point diamétralement opposé à Q sur ce cercle.
  Elle passe par l'intersection de la diagonale AA' avec la droite T1Isg1 ; ce point est le transformé ψ de Isg'1, la transformation ψ du QC étant décrite au paragraphe suivant.

- orthopivotale, lieu des intersections des perpendiculaires à toutes les droites passant par Isg avec les mêmes coniques transformées ψ des droites.
  Cette cubique ne passe pas par les 4 sommets du QA ; elle passe par les sommets de DT, par les points EP, Isg et Isg'.
  Elle coupe son asymptote, parallèle à la médiatrice de EPIsg en un point Q', diamétralement opposé à Isg' sur le cercle circonscrit à EP, Isg et Isg'.
  Cette cubique orthopivotale est une cubique circulaire focale de Van Rees (courbe décrite au paragraphe suivant).



4) QC, transformation ψ et cubique circulaire focale de Van Rees (figure 4)

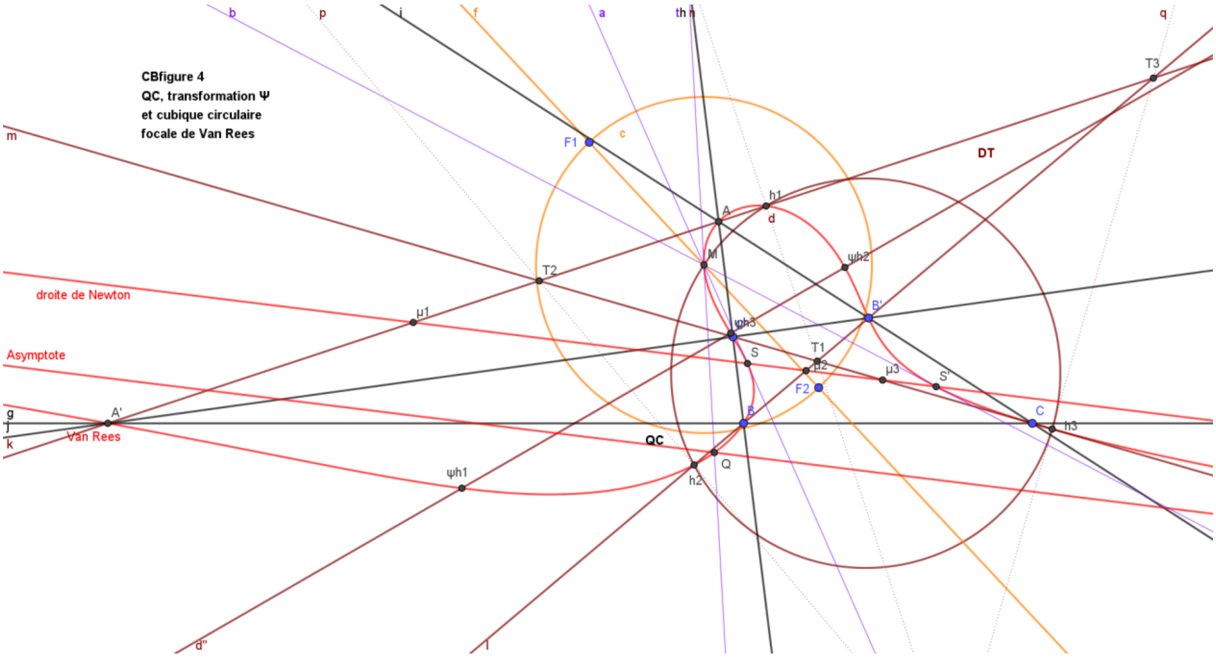
Le point de Miquel M est le centre d'une transformation ψ ; cette transformation de Moebius associe une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle de centre M. Les 2 intersections F1 et F2 de l'axe et du cercle sont les 2 points fixes de la transformation.

Cette transformation échange 2 à 2 les 6 sommets du QC ainsi que les 4 droites du QC passant par 3 des 6 points et les 4 cercles passant par les 3 autres points, qui passent par M.

La courbe circulaire focale de Van Rees est le lieu des couples de points conjugués ψ dont le milieu est sur la droite de Newton. Cette courbe peut être monocursale ou bicursale, le pivot étant le point à l'infini de la droite de Newton.

Cette courbe passe par les 6 sommets du QC, par le point M et par les sommets du triangle orthique de DT.

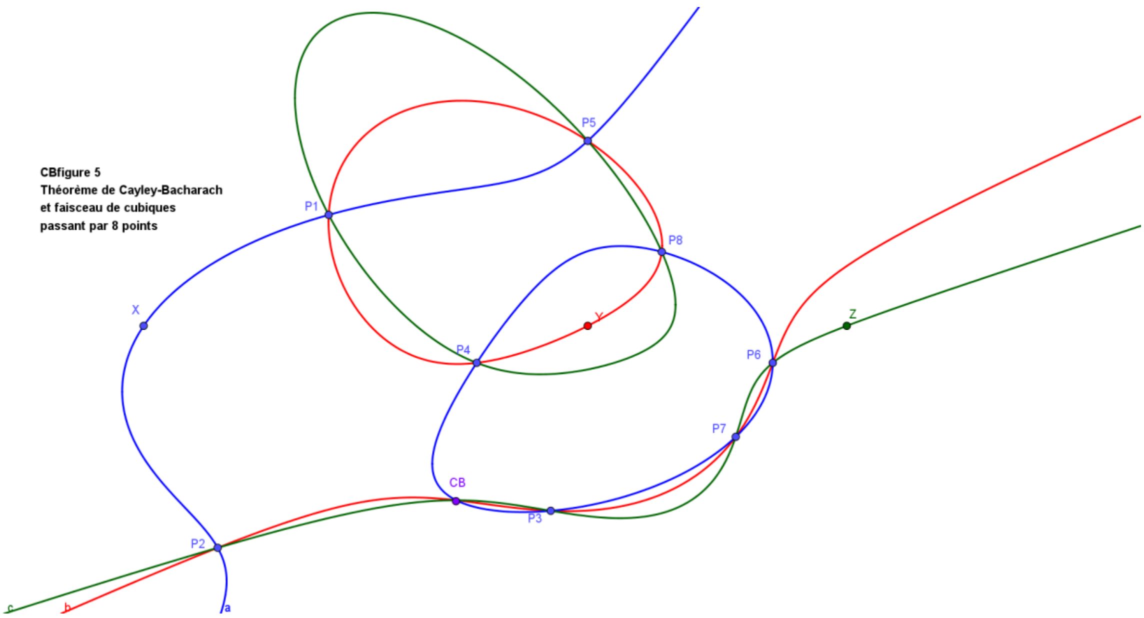
La cubique orthopivotale du QA, représentée sur la figure 3, est une cubique circulaire focale de Van Rees, invariante dans la transformation ψ de centre Isg' qui échange EP et Isg.



5) Théorème de Cayley-Bacharach et faisceau de cubiques passant par 8 points (figure 5)

Deux cubiques se coupent en 9 points ; du coup, il passe par ces 9 points une infinité de cubiques constituant un faisceau. Dès lors, pour 8 points en configuration générale, il existe un 9$^{\text{ème}}$ point C-B tel que par les 9 points il passe un faisceau de cubiques (sur la figure, chaque cubique est définie par les 8 points P1 à P8 et par un 9$^{\text{ème}}$ point, X, Y ou Z).

Du coup, en considérant 7 points réels et un 8$^{\text{ème}}$ point variable, on détermine une transformation CB qui échange le 8$^{\text{ème}}$ point et le CB point des 8 points. Cette transformation est encore possible si l'on prend dans les 7 points fixes 5 points réels et les 2 points circulaires.



B. Applications

L'idée est maintenant d'utiliser ces figures connues et leurs propriétés pour tracer chaque fois 3 courbes de même nature se rapportant aux 3 figures de même nature dérivées d'une même figure principale et d'observer leurs intersections.

Ainsi, pour le QA, on tracera les 3 QC et les 3 cubiques circulaires focales de Van Rees et, pour le QC, on tracera les 3 QA et les 3 isocubiques circulaires pivotales d'une part et orthopivotales d'autre part.

Les 9 courbes décrites sont circulaires et 2 d'entre elles de même nature se coupent en 9 points, 7 points réels et les 2 circulaires, qui constituent un CB système.

Nous serons dès lors amenés à étudier les CB transformations de 7 points réels ou de 7 points réels formant avec les 2 points circulaires un CB système et les cb transformations de 5 points réels et 2 points circulaires pour retrouver les 9 courbes décrites dans des faisceaux de cubiques pivotales circulaires ou non circulaires circonscrites à 7 points réels ou à 5 points réels et 2 points circulaires.

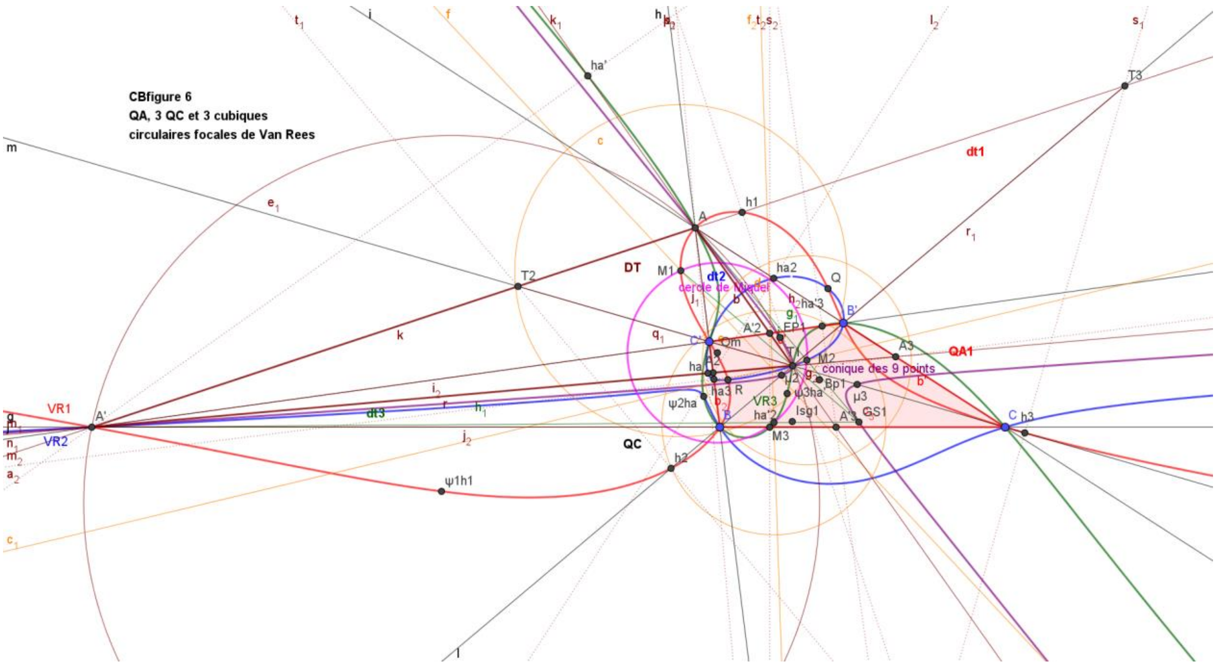
1) QA, 3 QC et 3 cubiques circulaires focales de Van Rees (figure 6)

On repart de la figure 1 avec le QA et les 3 qc et on trace les 3 cubiques circulaires focales de Van Rees des 3 qc.

Chacune de ces 3 courbes passe par les 6 sommets de son qc, par son point de Miquel (les 3 points de Miquel sont les sommets du triangle de Miquel du QA) et par les 3 sommets du triangle orthique de son dt.

L'une de ces courbes, VR1, est évidemment celle de la figure 4.

Les 3 courbes sont circulaires et passent par les 4 sommets du QA, qui sont des points triples ; elles se coupent 2 à 2 en 3 points doubles, dont un des sommets de AA'T1, DT du QA. Ainsi, par exemple, VR1 et VR2 se coupent en A', Q et R.



2) QC, 3 QA et 3 isocubiques circulaires pivotales
(figure 7)

On repart de la figure 2 avec le QC et les 3 qa et on trace les 3 isocubiques pivotales circulaires des 3 qa.

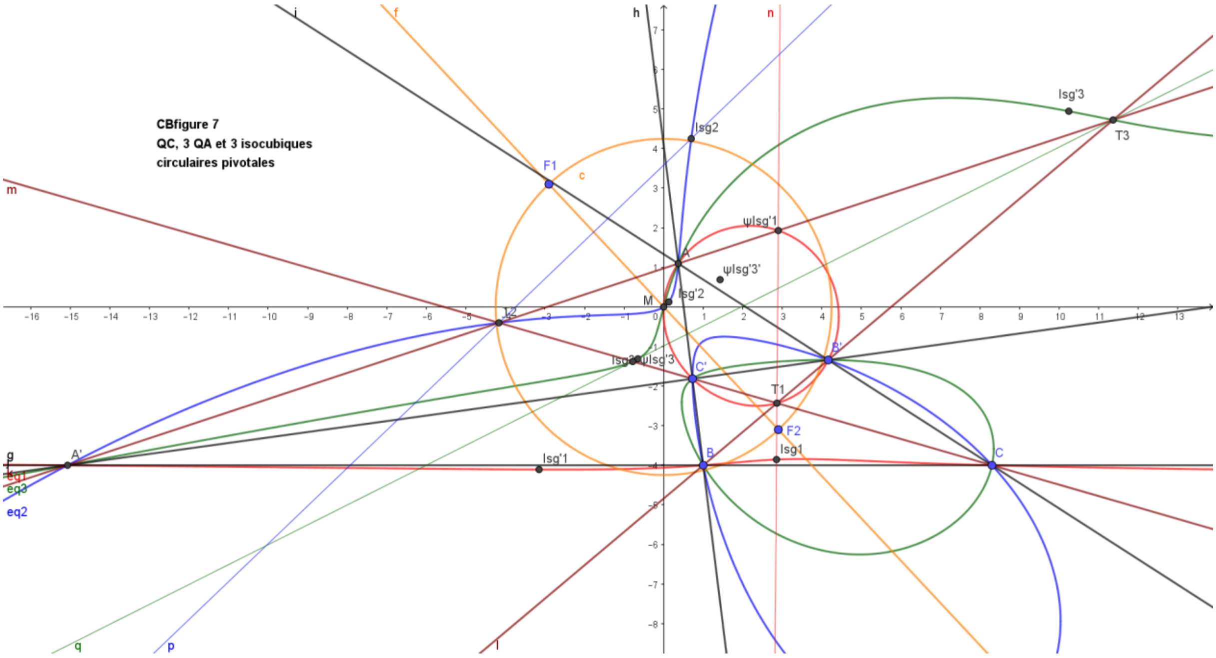
Chacune de ces courbes passe par les 4 sommets du qa, par les 3 sommets de son dt et par le pivot Isg et l'isopivot Isg'.

L'une de ces courbes est évidemment l'une des 2 courbes de la figure 3.

Il est immédiat que les 3 courbes passent par les 6 sommets du QC, puisque les 2 sommets non repris dans le qa sont 2 des 3 sommets de son dt, le 3ème étant un sommet de DT.

Il est non moins évident que les 3 courbes passent par le point de Miquel M du QC, puisque ce point est l'un des 3 sommets du triangle de Miquel de chaque qa.

Les 3 courbes ont donc 7 points réels communs A, A', B, B', C, C' et M ; en outre, elles sont circulaires et passent par les 2 points circulaires.



3) QC, 3 QA et 3 isocubiques circulaires orthopivotales
(figure 8)

On repart encore de la figure 2 avec le QC et ses 3 qa et on trace cette fois les 3 isocubiques orthopivotales circulaires des 3 qa.

Chacune de ces courbes passe par les 3 sommets du dt du qa et par le pivot Isgi, l'isopivot Isg'i et le point EPi. Cette courbe est invariante dans la transformation ψi de centre Isg'i qui échange EPi et Isgi.

L'une de ces courbes est bien sûr la seconde courbe de la figure 3.

Il apparaît cette fois que les 3 courbes ont 5 points réels communs X1, X2, X3, X4 et X5 et se coupent 2 à 2 en 2 autres points réels Ui et Vi ; en outre, elles sont circulaires.

Les 6 points doubles Ui et Vi sont coconiques.

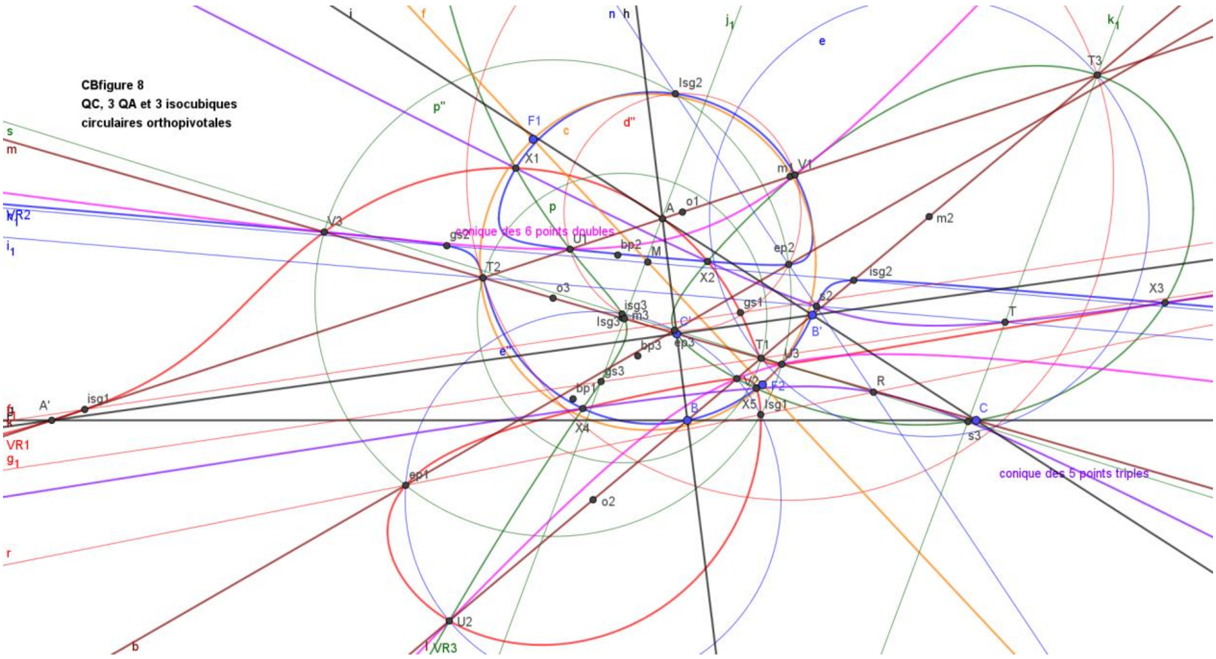
On peut construire simplement ces points doubles Ui et Vi, le cercle de diamètre UiVi étant le conjugué ψ du cercle de diamètre TjTk ; les 2 points Ui et Vi sont sur TjTk.

Cette diagonale TjTk de DT étant un diamètre des 2 cercles leur est orthogonale et ces 2 cercles étant conjugués ψ, le cercle passant par les 2 sommets du QC portés par la diagonale et M, conjugué ψ de cette diagonale, est lui-même orthogonal aux 2 cercles.

Les 3 cubiques sont alors les isocubiques pivotales des 3 QA UjVjUkVk ; les sommets des dt sont Ti, cpTi et ψiTi et les sommets du triangle de Miquel sont EPi, Isgi et Isg'i.

UjVk et UkVj se coupant orthogonalement en epi, point confondu avec cpTi, ces cubiques sont des cubiques circulaires focales de Van Rees, invariantes comme on l'a vu dans les transformations ψi de centre Isg'i qui échangent EPi et Isgi.

On peut vérifier les alignements gsiEPiTi, gsiIsgicpTi et gsiIsg'i ψiTi ; epi est le point EP du QA UjVjUkVk, bpi son barycentre, milieu de ojok, où oi et ok sont les milieux de UjVj et UkVk, gsi est son point GS, symétrique de epi par rapport à bpi.



Les 3 courbes VR1, VR2 et VR3 sont invariantes dans la cb transformation des 5 points X1, X2, X3, X4 et X5 et des 2 points circulaires.

Les droites passant par Isg1 et ep1, Isg2 et ep2 et Isg3 et ep3 sont concourantes en un point R de la conique des 5 points ; elles recoupent cette conique en un 2^{nd} point s1, s2 et s3.

Les droites passant par T1 et s1, T2 et s2 et T3 et s3 sont parallèles aux asymptotes des 3 cubiques et sont concourantes en un point T de la conique des 5 points (ce point sera étudié dans la dernière partie).

C. Transformation Cayley-Bacharach de 7 points réels

1) Cas général (points Tij et construction d'une cubique avec un pivot P) (figure 9)

7 points réels définissent 21 cubiques dégénérées formées d'une droite Dij passant par 2 des 7 points et une conique Cij passant par les 5 autres.

Si l'on considère 2 de ces cubiques, choisies de manière à ce que les 2 coniques aient 3 des 7 points en commun, elles se coupent aux 7 points par construction et en 2 autres points situés l'un à l'intersection des 2 droites (ce point n'étant pas l'un des 7 points) et l'autre à la 4ème intersection des 2 coniques (ce point n'étant pas non plus l'un des 7 points).

Du coup, les 2 cubiques passent par les 9 points, qui forment un CB système.

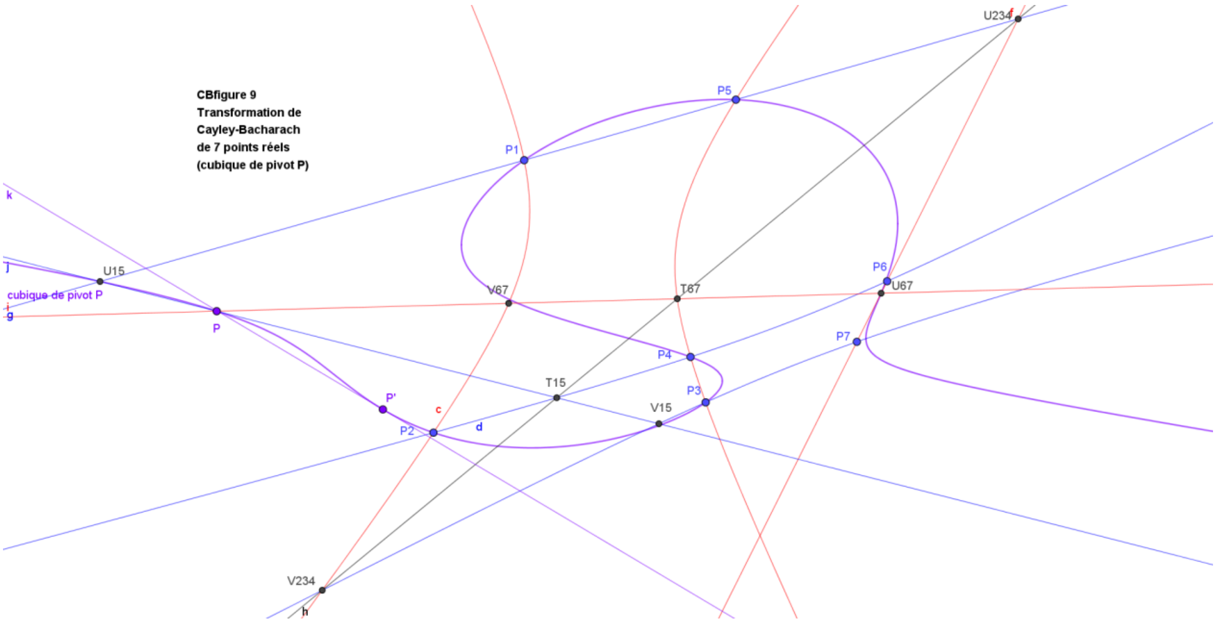
La droite passant par les 2 derniers points recoupe les 2 coniques en 2 points constituant les pivots de la CB transformation de 7 points, qui échange sur chacune des 2 cubiques, la droite et la conique.

En généralisant cette construction, on trouve 21 pivots Tij, qui échangent la droite et la conique de chacune des 21 cubiques dégénérées.

Il s'ensuit la construction simple d'une cubique de pivot P circonscrite aux 7 points et invariante dans la CB transformation de ces 7 points.

On trace les droites passant par P et un pivot Tij ; chaque droite recoupent la droite Dij ou PiPj en un point Uij et la conique Cij en un point Vij.

Les 21 couples de points Uij et Vij sont CB conjugués sur la cubique de pivot P circonscrite aux 7 points ; le tangentiel P' de P sur la cubique est l'isopivot.



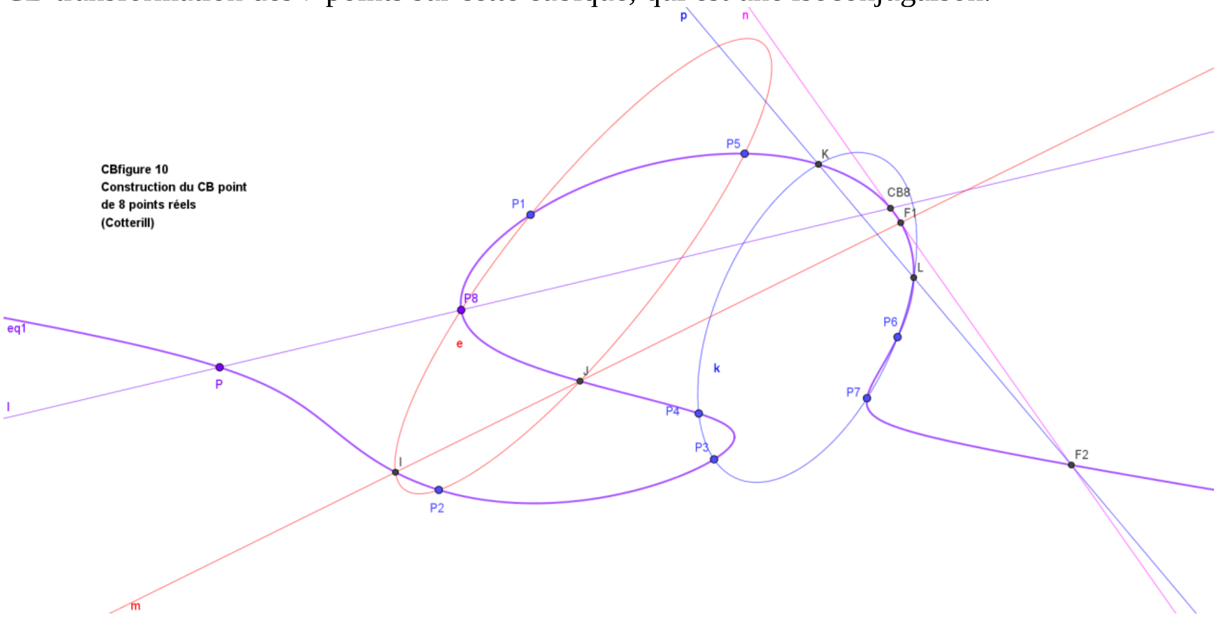
Réciproquement, 7 points réels déterminent sur une cubique circonscrite un pivot P et la cubique est une isocubique pivotale invariante dans la CB transformation des 7 points.

2) Construction du CB point de 8 points réels
(figure 10)

On connait au moins 3 manières de construire le CB point de 8 points réels :

- On construit 2 cubiques passant par les 8 points et un 9ème point X ou Y ; le CB point des 8 points est la 9ème intersection des 2 cubiques (cf figure 5)
- On construit une cubique de pivot l'un des 8 points circonscrite aux 7 autres en utilisant la méthode décrite ci-dessus ; le CB point des 8 points est le tangentiel du pivot sur la cubique (cf figure 9). On note qu'il existe 8 cubiques possibles.
- Si on dispose d'une cubique connue passant par les 8 points, on peut utiliser la construction de Cotterill. Pour chaque groupe de 4 points, toute conique circonscrite recoupe la cubique en 2 autres points et la droite passant par ces 2 points recoupe la cubique en un 3ème point fixe, appelé foyer du groupe de 4 points. Pour 2 groupes de 4 points, le CB point des 8 points est la 3ème intersection de la droite passant par les 2 foyers avec la cubique. Pour 8 points, il y a 70 foyers et 35 droites joignant 2 foyers conjugués et passant par le CB point des 8 points.

Si on considère 7 points fixes sur une cubique et un 8ème point variable, les droites joignant le 8ème point et le CB des 8 points recoupent la cubique en un point fixe, pivot de la CB transformation des 7 points sur cette cubique, qui est une isoconjugaison.



3) Cas particulier de 7 points formant avec les 2 points circulaires un CB système

On va s'intéresser maintenant au cas particulier de 7 points formant avec les 2 points circulaires un CB système ; il passe par les 7 points une infinité de de cubiques circulaires.

Ces 7 points réels déterminent sur une cubique circulaire circonscrite un pivot Pc et les 2 points circulaires sont CB conjugués de la CB transformation des 7 points réels ; le pivot Pc est dès lors nécessairement sur la droite de l'infini (qui passe par les 2 points circulaires).

Mais ils déterminent aussi sur la même cubique circulaire circonscrite 21 pivots pij pour les cb transformations de 5 points réels et des 2 circulaires ; les 2 derniers points réels sont cb conjugués dans cette cb transformation et le pivot pij est sur la droite PiPj.

Il y a une infinité de cubiques circulaires circonscrites à ces 7 points, le pivot étant sur la droite de l'infini et la cubique invariante dans la CB transformation ou sur l'une des droites PiPj et la cubique invariante dans la cb transformation des 5 autres points et des 2 circulaires.

Il y a bien sûr en outre une infinité de cubiques non circulaires circonscrites pour des pivots situés en dehors de ces droites.

D. Trois exemples de CB transformation de 7 points réels tirés du QA/QC

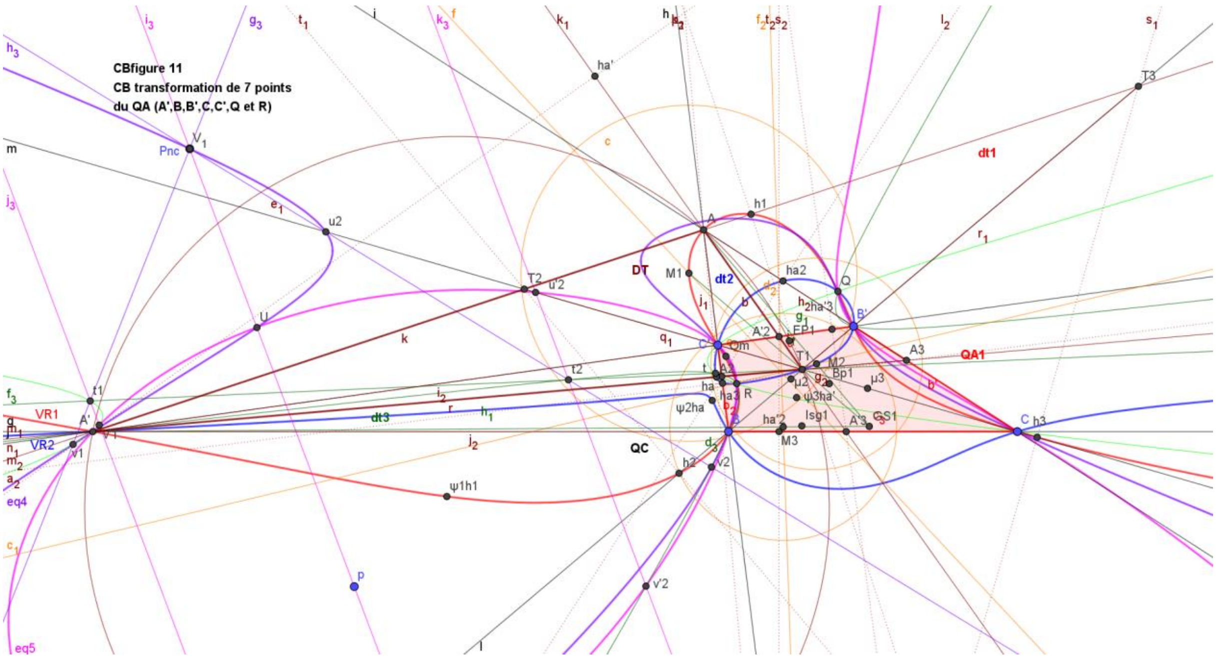
1) Application aux 7 points du QA A', B, B', C, C', Q et R
(figure 11)

On trouve avec le QA une application aux 7 points A', B, B', C, C', Q et R.

On a rencontré sur la figure 6 2 cubiques circulaires VR1 et VR2 circonscrites à ces 7 points. Les 2 points circulaires sont CB conjugués par rapport aux 7 points et les 9 points forment un CB système.

Il existe donc une infinité de cubiques circulaires circonscrites aux 7 points réels et invariantes dans la CB transformation de 7 points ; il suffit de prendre le pivot Pc sur la droite de l'infini (ce qui revient à choisir une direction).

Les cubiques VR1 et VR2 sont invariantes dans la cb transformation des 5 points A', B, B', C et C' et des 2 points circulaires ; les points Q et R sont cb conjugués dans cette cb transformation et les 2 pivots de VR1 et VR2 par rapport à cette cb transformation sont les 3èmes intersections de la droite QR avec ces 2 cubiques.



Mais on peut aussi construire une cubique non circulaire circonscrite aux 7 points réels de pivot Pnc en utilisant la construction précédente avec les 2 droites BB' et CC' et les 2 coniques passant par A', B, B', Q et R et A', C, C', Q et R. On détermine les 2 pivots sur ces 2 coniques, ce qui permet de disposer de 2 couples de points CB conjugués U sur les droites et V sur les coniques.

La figure 11 montre les 2 cubiques circulaires focales de Van Rees VR1 et VR2 de la figure 6, une cubique circulaire de pivot Pc sur la droite de l'infini et une cubique non circulaire de pivot Pnc, toutes 2 invariantes dans la CB transformation des 7 points.

2) Application aux points du QC A, A’, B, B’, C, C’ et M
(figure 12)

On trouve avec le QC une 1ère application aux 7 points A, A’, B, B’, C, C’ et M.

On note que 4 des cubiques dégénérées sont circulaires ; elles sont formées par une des 4 droites du QC, qui porte 3 sommets et le cercle circonscrit aux 3 autres, qui passe par M.

Les 2 points circulaires sont CB conjugués dans la CB transformation des 7 points et il existe une infinité de cubiques circulaires circonscrites aux 7 points réels et invariantes dans la CB transformation ; leurs pivots sont sur la droite de l’infini.

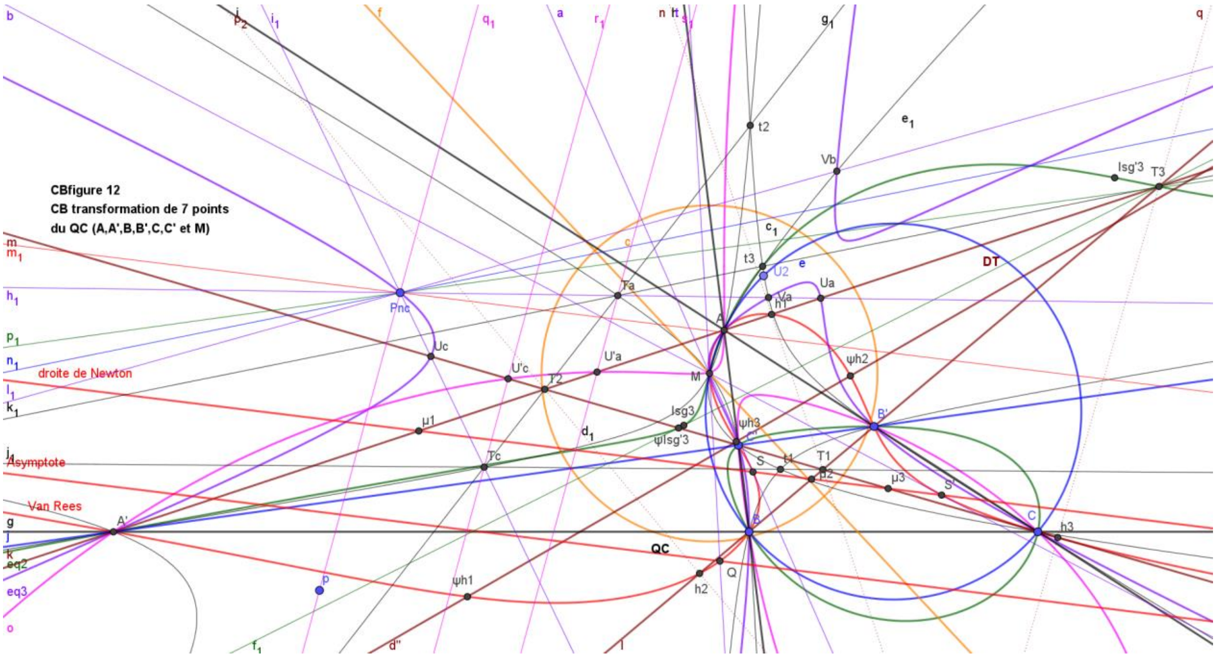
La cubique circulaire focale de Van Rees de la figure 4 (ou, comme on l’a vu, VR1 de la figure 6) en est un exemple ; le pivot au regard est le point à l’infini de la droite de Newton.

Les 3 isocubiques circulaires pivotales des 3 QA du QC de la figure 7 sont aussi circonscrites aux 7 points et leurs pivots sont sur la droite de l’infini.

Mais on peut aussi facilement construire des cubiques non circulaires circonscrites aux 7 points de pivot Pnc en utilisant la construction générale précédente avec les 3 diagonales du QC passant par 2 sommets opposés et les coniques passant par M et les 4 autres sommets.

On détermine 3 pivots sur ces coniques, ce qui permet de déterminer 3 couples de points CB conjugués U sur les droites et V sur les coniques.

La figure 12 montre une des 4 cubiques dégénérées formée du cercle circonscrit au triangle ABC (qui passe par M et les 2 points circulaires) et de la droite passant par A’, B’ et C’, la cubique circulaire focale de Van Rees du QC, l’isocubique circulaire pivotale du QA BB’CC’, une cubique circulaire de pivot Pc à l’infini et une cubique non circulaire de pivot Pnc, toutes invariantes dans la CB transformation des 7 points.



3) Application aux points du QC X1, X2, X3, X4, X5, U1 et V1
(figure 13)

On trouve avec le QC une 2nde application aux 7 points X1, X2, X3, X4, X5, U1 et V1.

On a déjà rencontré 2 cubiques circulaires circonscrites à ces 7 points ; ce sont les 2 isocubiques circulaires orthopivotales VR2 et VR3 de la figure 8.

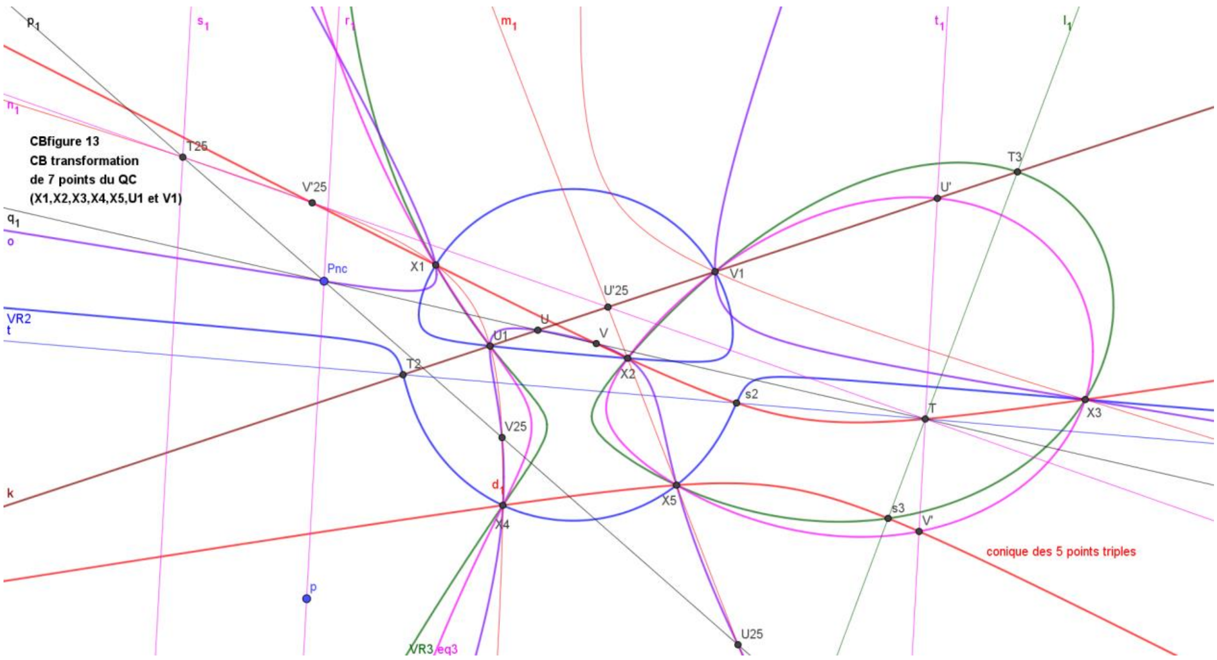
Les 7 points forment avec les 2 points circulaires un CB système. Il existe donc une infinité de cubiques pivotales circulaires invariantes dans la CB transformation des 7 points ; il suffit de choisir le pivot Pc sur la droite de l'infini.

Il existe aussi une infinité de cubiques pivotales circulaires circonscrites aux 7 points et invariantes dans la cb transformation de 5 des 7 points réels et des 2 circulaires ; VR2 et VR3 sont ainsi invariantes dans la cb transformation des 5 points réels X1, X2, X3, X4 et X5 et des 2 circulaires et les 2 pivots T2 et T3 sont les 3èmes intersections de la droite U1V1 avec les 2 cubiques VR2 et VR3.

Mais il existe encore une infinité de cubiques pivotales non circulaires circonscrites aux 7 points ; il suffit de choisir le pivot en dehors des 21 droites joignant les 7 points 2 à 2 et d'utiliser la construction générale avec les 21 droites et les 21 coniques.

La figure 13 montre les 2 isocubiques circulaires orthopivotales et 2 cubiques circonscrites aux 7 points, l'une circulaire de pivot Pc sur la droite de l'infini et l'autre non circulaire de pivot Pnc.

On note du reste que la cubique dégénérée formée par la conique des 5 points triples et la droite U1V1 est aussi par définition une cubique de pivot T invariante dans la CB transformation des 7 points.



Il est temps maintenant d'étudier la cb transformation de 5 points réels et 2 points circulaires et de s'intéresser à la géométrie du pentangle.

E. Transformation Cayley-Bacharach de 5 points réels et 2 points circulaires

1) Cas général (point T et construction d’une cubique circulaire de pivot P) (figure 14)

5 points réels définissent 11 cubiques circulaires dégénérées :

- 10 sont formées d’une droite par 2 des 5 points et d’un cercle par les 3 autres (on rappelle que tout cercle passe par les 2 points circulaires)
- 1 est formée par la droite de l’infini (cette droite passe par les 2 points circulaires) et la conique des 5 points.

2 des 10 cubiques se coupent aux 5 points réels et aux 2 points circulaires et en 2 autres points situés à l’intersection des 2 droites et à la 2$^{\text{ème}}$ intersection réelle des 2 cercles.

Du coup les 2 cubiques passent par les 9 points qui forment un CB système.

La droite passant par ces 2 intersections recoupe les 2 cercles en 2 points constituant les pivots de la cb transformation des 5 points réels et des 2 points circulaires. On obtient ainsi 10 pivots Tij, qui échangent la droite et le cercle de chacune des 10 cubiques dégénérées.

La 11$^{\text{ème}}$ cubique dégénérée et l’une des 10 premières se coupent de même en 2 points, l’un étant le point à l’infini de la droite passant par 2 des 5 points réels et l’autre la 4$^{\text{ème}}$ intersection du cercle passant par les 3 autres points réels et de la conique des 5 points. La parallèle à la droite passant par 2 des 5 points recoupe le cercle au point Tij et la conique au point T (ce point étant bien sûr indépendant du cercle choisi).

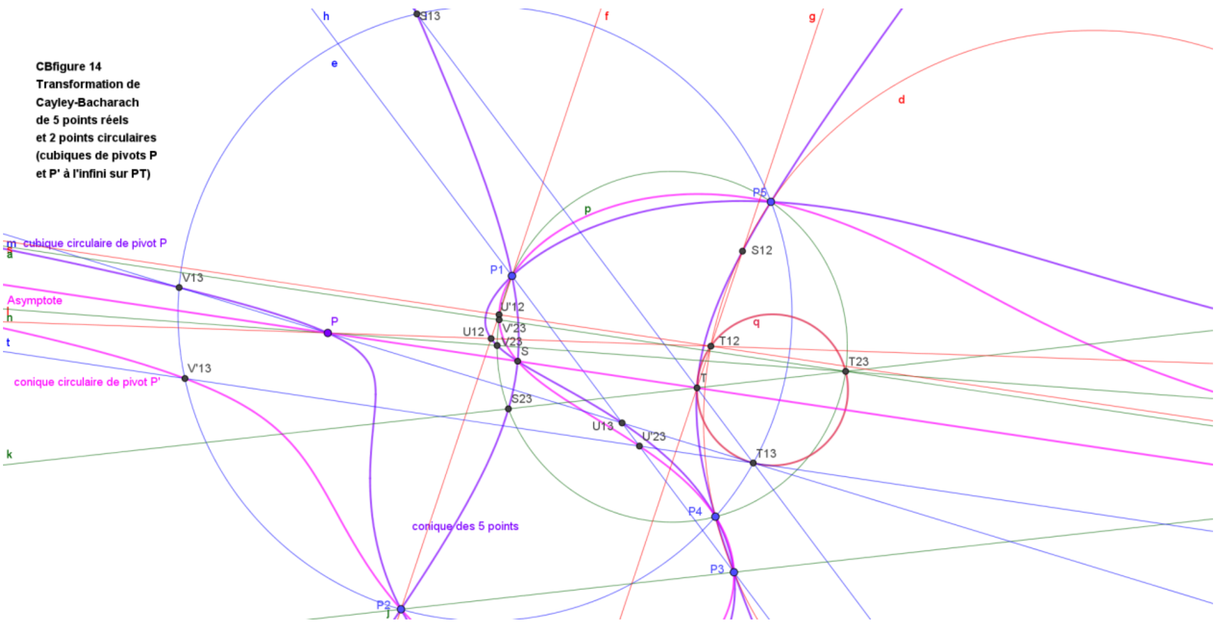
Il s’ensuit la construction simple d’une cubique circulaire de pivot P circonscrite aux 5 points et invariante dans la cb transformation définie par ces 5 points et les 2 circulaires.

On trace les droites passant par P et un pivot Tij sur le cercle Cij ; chaque droite recoupe la droite Dij en un point Uij et le cercle Cij en un point Vij.

Les 10 couples de points Uij et Vij sont cb conjugués sur la cubique circulaire de pivot P circonscrite aux 5 points réels.

La droite PT recoupe la conique des 5 points en un point S sur la cubique et cette droite PT est parallèle à l’asymptote de la cubique, le point à l’infini et le point S étant cb conjugués et constituant les intersections autres que les 5 points réels et les 2 circulaires de la cubique et de la cubique dégénérée formée par la conique des 5 points réels et la droite de l’infini.

Si le pivot P est un point P’ à l’infini de la droite PT, celle-ci est elle-même l’asymptote.



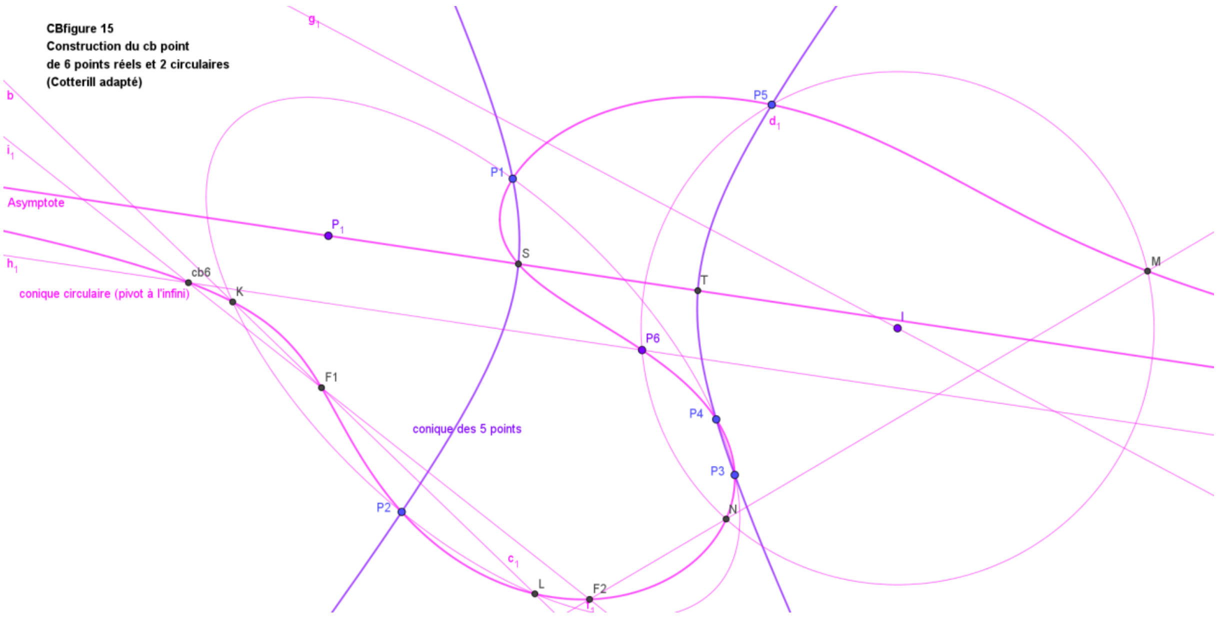
2) Construction du cb point de 6 points réels et 2 points circulaires (figure 15)

Sur les 3 manières de construire le CB point de 8 points réels, décrites dans la partie C2, la 1ère n'est pas utilisable, car on ne sait pas construire une cubique circulaire passant par 7 points réels, mais la 2nde est identique et la 3ème semblable à une adaptation près :

- On construit une cubique circulaire de pivot l'un des 6 points circonscrite aux 5 autres en utilisant la méthode décrite ci-dessus ; le cb point des 6 points est le tangentiel du pivot sur la cubique (cf figure 14). On note qu'il existe 6 cubiques possibles.
- Si on connait une cubique circulaire passant par les 6 points, on peut utiliser la construction de Cotterill, en remplaçant la conique passant par le 2nd groupe de 4 points par un cercle passant par les 2 derniers points et les 2 points circulaires. Pour 6 points, il y a 15 foyers et 15 droites joignant 2 foyers conjugués et passant par le cb point.

Si on considère 5 points fixes sur une cubique et un 6ème point variable, les droites joignant le 6ème point et le cb point des 6 points recoupent la cubique en un point fixe, pivot de la cb transformation des 5 points sur cette cubique, qui est une isoconjugaison.

Ainsi, sur la figure 15, P1 à P5 étant fixes et le point P6 variable, la droite P6cb6 est parallèle à l'asymptote, le pivot Pc étant à l'infini (comme sur la figure 14).



Cette construction générale permet d'identifier sur les cubiques circulaires déjà rencontrées des cb de 6 points connus ou des pivots de transformations de cb de 5 points connus.

Ainsi, pour se limiter à quelques exemples simples sur la courbe circulaire pivotale :

- le cb(sommets de DT et de Miquel) est le transformé φ du tangentiel de GS (on rappelle que le transformé φ d'un point de la courbe est la 3ème intersection de la droite passant par Isg et par ce point avec la courbe – voir aussi partie A3)
- le cb(P1,P2,P3,P4,Isg,GS) est le tangentiel de GS
- la transformation cb(P1,P2,P3,P4,Isg) a pour pivot GS

F. Géométrie du Pentangle

1) Conique des 5 points et 5 isocubiques pivotales associées (figure 16)

Un QA de sommets P1, P2, P3 et P4 et un point P déterminent une isocubique pivotale de pivot P invariante dans une isoconjugaison par rapport au triangle DT de points fixes les 4 sommets du QA.

La conique passant par les 4 sommets du QA et le pivot est l'unique conique diagonale polaire de la cubique, à savoir précisément la conique polaire du pivot P par rapport à la cubique, qui passe par les points de contact des tangentes issues de P à la cubique.

Cette conique contient les sommets du triangle anticévien du pivot par rapport à DT et plus généralement les sommets des triangles anticéviens de tous ses points par rapport à DT.

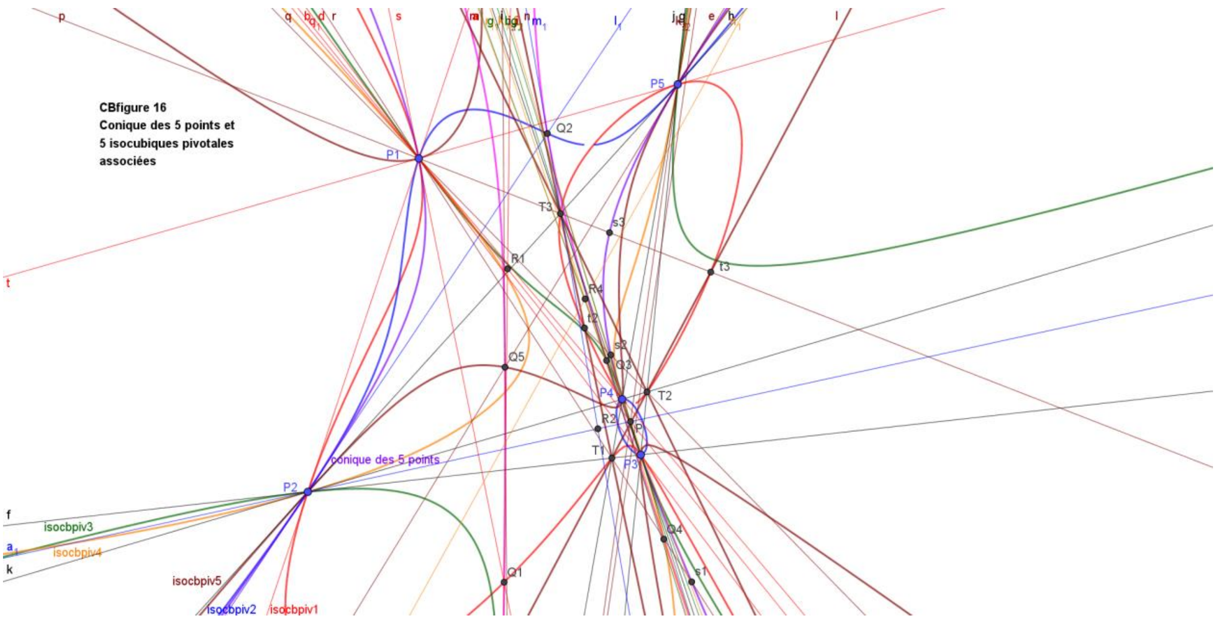
L'isocubique de pivot P passe par les 4 sommets du QA, les 3 sommets de DT, le pivot P et l'isopivot P' (tangentiel de P) et par les sommets du triangle cévien de P par rapport à DT (les sommets des triangles cévien et anticévien sont conjugués harmoniques par rapport aux sommets de DT).

On peut dès lors, pour 5 points donnés, construire 5 isocubiques pivotales, l'un des 5 points étant le pivot et les 4 autres les sommets du QA et les points fixes d'une isoconjuguaison par rapport à son DT.

La conique des 5 points est la conique diagonale polaire du pivot pour les 5 cubiques ; elle est tangente aux 5 cubiques aux pivots P1, P2, P3, P4 et P5.

Les isopivots Q1, Q2, Q3, Q4 et Q5 sont par construction sur les tangentes à la conique aux 5 points P1, P2, P3, P4 et P5. Si on refait la même opération avec les points Q1, Q2, Q3, Q4 et Q5 et leur conique des 5 points, on détermine 5 nouveaux points R1, R2, R3, R4 et R5.

Les 5 points R1, R2, R3, R4 et R5 sont en perspective avec les points P1, P2, P3, P4 et P5 et déterminent un centre de perspective P.



2) Transformation ψ de 5 points et point M
(figure 17)

On construit les points :

- Q2, inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P3, P4 et P5
- Q3, inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P4 et P5
- Q4, inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P5
- Q5, inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P4

On construit ensuite le point R1 :

- inverse de P2 par rapport au cercle circonscrit à Q3, Q4 et Q5
- inverse de P3 par rapport au cercle circonscrit à Q2, Q4 et Q5
- inverse de P4 par rapport au cercle circonscrit à Q2, Q3 et Q5
- inverse de P5 par rapport au cercle circonscrit à Q2, Q3 et Q4

On a alors :

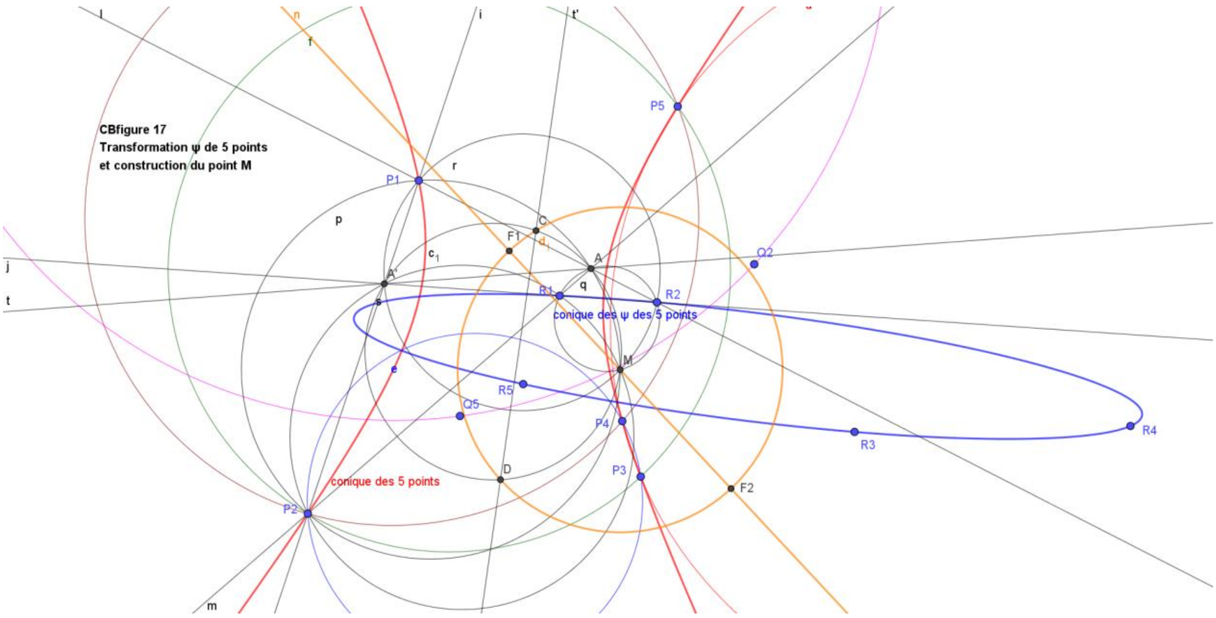
- R2 est l'inverse de R1 par rapport au cercle circonscrit à P3, P4 et P5
- R3 est l'inverse de R1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P4 et P5
- R4 est l'inverse de R1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P5
- R5 est l'inverse de R1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P4

et enfin :

- P2 est l'inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P3, P4 et P5
- P3 est l'inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P4 et P5
- P4 est l'inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P5
- P5 est l'inverse de P1 par rapport au cercle circonscrit à P2, P3 et P4

Les 10 points P1, P2, P3, P4 et P5 et R1, R2, R3, R4 et R5 sont donc tels que 2 des points Pi sont inverses par rapport au cercle circonscrit aux 3 autres points Rj et vice-versa.

Les 5 points R1, R2, R3, R4 et R5 sont les conjugués ψ des 5 points P1, P2, P3, P4 et P5 ; 2 couples particuliers suffisent à déterminer le centre M et les 2 points fixes F1 et F2 de la transformation (F1F2 étant l'axe de symétrie et le diamètre du cercle d'inversion).



3) Cubique et quartique associées et points U, ψU et ψT
(figure 18)

Le point U est le transformé ψi de chacun des 5 points Pi dans la transformation ψi du QC formé par les médiatrices des segments joignant ce point aux 4 autres. Il est remarquable que la même définition donne, pour les 5 points Ri = ψPi le point ψU.

Pour chacun des 5 points Pi ou Ri = ψPi, on appelle isgi ou isg'i le point isogonal Isg du QA formé par les 4 autres points ; on obtient ainsi 5 points isgi et 5 points isg'i.

Les milieux des segments Piψisg'i et Riψisg' sont alignés sur une droite de Newton des deux pentangles, qui passe par les milieux t et t' des segments UT et ψUT'. Les 5 milieux des segments Piisgi ou Riisg'i sont cocycliques sur 2 cercles de centres ω et ω', appelés par analogie cercles de Newton des 2 pentangles.

Les 10 points Ri = ψPi et ψisgi déterminent une isocubique pivotale de pivot le point à l'infini de la droite de Newton ; cette cubique est une cubique circulaire focale de Van Rees de foyer ψU. C'est aussi une cubique circulaire circonscrite aux 5 points Ri et l'asymptote est la parallèle à la droite de Newton par le point T' des 5 points Ri (sur la conique de ces 5 points).

La transformée ψ de cette cubique est une quartique bicirculaire passant par définition par les 5 points Pi et les 5 points isgi et par les points U et M.

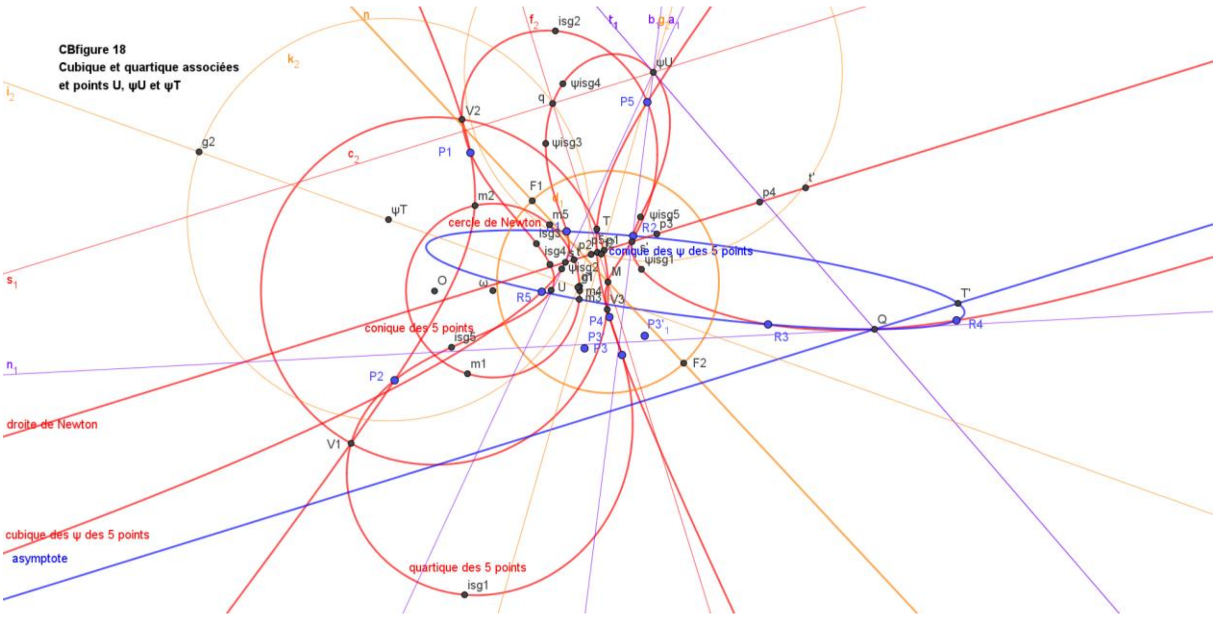
La cubique est invariante dans une transformation ψ' de centre ψU, qui échange les 5 points Ri et les 5 points ψisgi ; les milieux des segments joignant 2 points conjugués de la cubique sont alignés sur la droite de Newton.

La quartique est invariante dans une transformation ψ'' = ψ*ψ'*ψ de centre ψT, qui échange par définition les 5 points Pi et les 5 points isgi et les points M et U ; les milieux des segments joignant 2 points conjugués de la quartique sont cocycliques sur le cercle de Newton.

La conique des 5 points Ri et la cubique se coupent en 6 points, les 5 points Ri et un $6^{\text{ème}}$ point Q, point où la cubique coupe son asymptote.

La conique des 5 points Pi coupe la quartique en 8 points, les 5 points Pi et 3 points V1, V2 et V3. U est l'orthocentre du triangle V1V2V3, le cercle de Newton de centre ω est son cercle d'Euler et son cercle circonscrit passe par M et T. Enfin, les 3 points V1, V2 et V3 déterminent avec U et T une hyperbole équilatère centrée au milieu t de UT.

La cubique circulaire et la quartique bicirculaire sont des exemples de courbes anallagmatiques, çàd invariantes dans une inversion, les 2 points inverses étant les points de contact de cercles bitangents à ces courbes.



G. Deux exemples de cb transformation de 5 points réels tirés du QA/QC

1) Cas de 4 points et leur point isogonal
(figure 19)

Pour un QA de 4 points Pi, de point isogonal Isg, la transformation ψ des 5 points a pour centre le point Isg et elle échange les 4 sommets Pi du QA et les centres Oi des cercles circonscrits aux 4 triangles des 3 autres sommets et bien sûr le point Isg et un point à l'infini.

Elle échange aussi le point GS, isogonal de Isg par rapport au triangle de Miquel du QA, et le point F, foyer de l'isocubique circulaire pivotale de pivot Isg ; ce point est sur le cercle circonscrit au triangle de Miquel le point diamétralement opposé au point Q où la cubique recoupe son asymptote (cf figure 3).

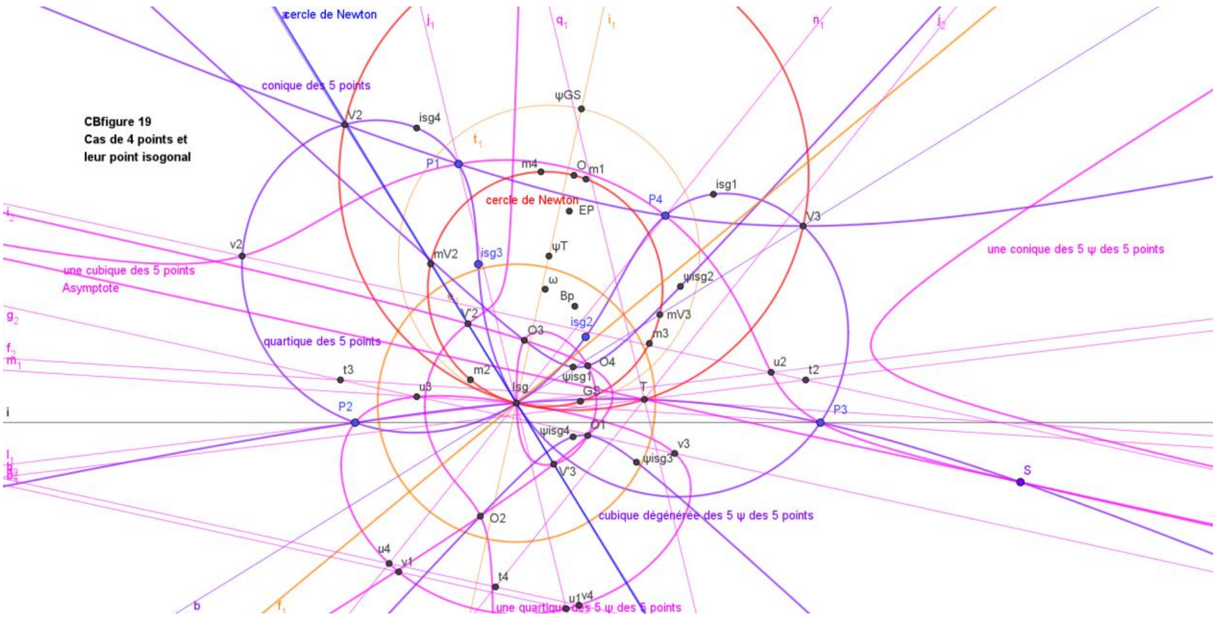
La conique jumelle de la conique circonscrite aux 5 points n'est pas définie à cause du point à l'infini. La cubique des 4 points Oi est dégénérée en une conique et la droite de l'infini (qui passe par les points circulaires) ; cette conique est l'hyperbole équilatère de centre GS passant par les 4 centres Oi des cercles circonscrits et par leurs symétriques par rapport à GS, qui sont les conjugués ψ des 4 points isgi. La cubique jumelle n'est pas définie.

La quartique des points Pi et Isg est la transformée ψ de la conique, elle passe par les 5 points et par les points isgi. La quartique jumelle n'est pas définie.

On peut toutefois trouver une série de 3 courbes jumelles en donnant un point à l'infini quelconque (ceci revient à choisir une direction ou un point S sur la conique des 5 points Pi + Isg). On sait alors tracer une conique passant par les 4 points Oi et par ce point à l'infini et une cubique circulaire circonscrite aux 5 points Pi + Isg ayant la droite TS comme asymptote et le point à l'infini de cette droite comme pivot. La quartique est la transformée ψ de la cubique, elle passe par les 4 points Oi et recoupe la conique aux 3 points alignés Isg, V'2 et V'3.

Les points M et U sont en Isg, le point T est le symétrique de Isg par rapport à GS et le point ψT, centre de la transformation ψ'' qui échange les points Pi et isgi, est le milieu du segment joignant Isg et F, points fixes de cette transformation. Si mi est le milieu du segment Piisgi, la droite Piisgi est la bissectrice de l'angle IsgmiF ; Pi, isgi, Isg et F sont cocycliques.

Le cercle de Newton qui passe par les milieux mi passe par Isg et par GS ; le cercle homothétique du cercle de Newton dans l'homothétie de centre Isg et de rapport 2 est le cercle des points V, qui recoupe la conique des 5 points en T et les 3 points V, V1 étant en Isg et V2 et V3 à l'intersection des tangentes en Isg à la quartique (les 3 points V sont sur la quartique).



2) Cas des 5 points triples du QC et propriétés de M, U, T et R (figure 20)

Les 5 points triples des 3 cubiques circulaires orthopivotales des 3 QA du QC donnent un merveilleux exemple de propriétés se combinant comme dans un mécanisme d'horlogerie.

On détermine d'abord le point T de la conique des 5 points triples.

On construit ensuite la transformation ψ des 5 points Xi, qui échange les Xi et les Yi. Cette transformation est la transformation ψ du QC, qui échange les sommets A et A', B et B' et C et C', les 3 sommets Ti de DT et les 3 points Isgi et les 3 points Isg'i et les 3 points ψIsg'i. Elle échange aussi le cercle circonscrit à DT et le cercle circonscrit aux 3 points Isgi et le cercle circonscrit aux 3 points Isg'i (qui passe par M) et la droite passant par les 3 points ψIsg'i.

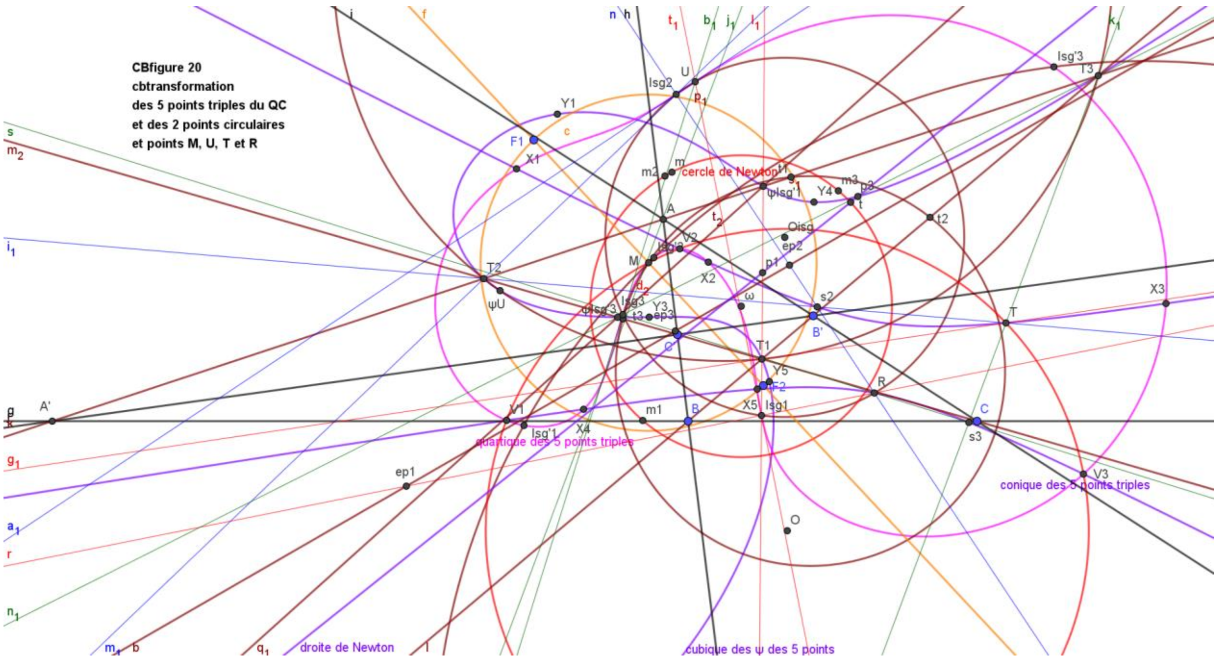
La cubique circulaire focale de Van Rees passant par les 5 points Yi = ψXi et ψisgi a pour foyer ψU, pour droite de Newton la droite passant par les milieux des segments Yiψisgi et pour pivot de la cb transformation des 5 points Yi le point à l'infini de la droite de Newton. L'asymptote est la parallèle à la droite de Newton par le point T' de la conique des 5 points Yi. La cubique est invariante dans la transformation ψ' de centre ψU qui échange les Yi et les ψisgi.

Cette isocubique est aussi la courbe de Van Rees du QC formé par le triangle diagonal DT et la cévienne passant par les 3 points ψIsg'i. Les points Ti et ψIsg'i sont conjugués dans la transformation ψ' et les milieux des segments TiψIsg'i sont sur la droite de Newton.

Le point ψU est le point Dδ du cercle circonscrit au DT du QC (cf figure 1) et le point U est le point ψDδ sur le cercle circonscrit aux 3 points Isgi.

La transformée ψ de la cubique est une quartique bicirculaire passant par les points Xi et isgi et par les points M et U par définition ; il résulte de la 2^{nde} identification ci-dessus qu'elle passe aussi par les points Isgi et Isg'i. Elle est invariante dans une transformation ψ'' = ψ*ψ'*ψ qui échange les Xi et les isgi, M et U et les Isgi et les Isg'i ; les milieux des segments joignant 2 points conjugués sont sur le cercle de Newton.

Les 3 points Isgi sont sur la quartique les tangentiels de U et le cercle circonscrit aux Isgi passe par U ; les normales à la quartique aux points Isgi concourent en un point R de la conique des 5 points diamétralement opposé à U sur le cercle circonscrit aux Isgi.



Les 3 cubiques circulaires orthopivotales des 3 QA du QC, VR1, VR2 et VR3 sont invariantes dans la cb transformation des 5 points triples et des 2 points circulaires.

Elles recoupent la conique des 5 points en 3 points s1, s2 st s3 et les droites T1s1, T2s2 et T3s3, parallèles aux droites de Newton et aux asymptotes de ces cubiques concourent au point T de la conique.

Les 3 droites Isg1ep1, Isg2ep2 et Isg3ep3 (normales à la quartique aux points Isgi) passent respectivement par les points s1, s2 et s3 et concourent au point R de la conique.

Le point ψR du cercle circonscrit au triangle diagonal DT est l'inverse de M dans l'inversion de centre Hδ qui échange les sommets de DT et les pieds des hauteurs ou sommets de son triangle orthique, çàd le cercle circonscrit et le cercle d'Euler de DT.

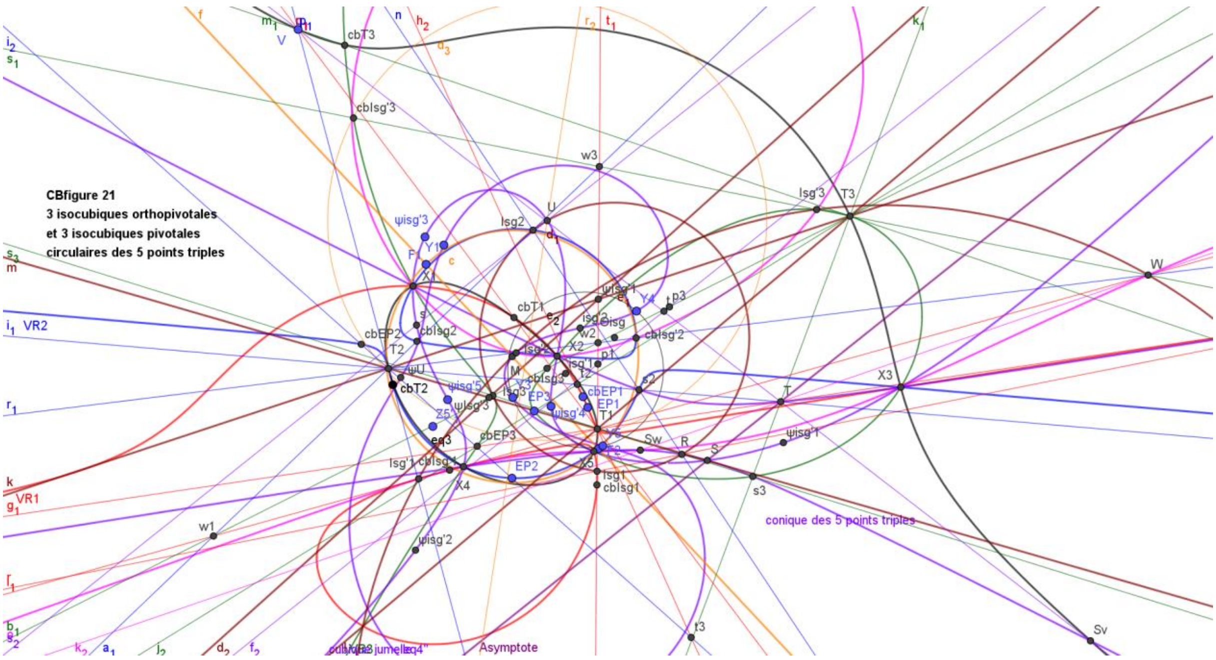
NB Pour 5 points quelconques Pi, on peut toujours construire les points M, T et U et ψU, ainsi que la conique des 5 points Pi, la cubique des conjugués ψ Ri=ψPi et la quartique des 5 points Pi, mais on ne trouve pas les 3 tangentiels de U sur un cercle passant par U tels que les normales à la quartique en ces points concourent en un point R de la conique.

3) 3 isocubiques orthopivotales et 9 isocubiques circulaires des 5 points triples (figures 21 et 22)

Parmi les isocubiques circulaires circonscrites aux 5 points triples, on connaît déjà les 3 isocubiques orthopivotales des 3 QA du QC. Elles ont les points Ti comme pivots et les droites TTi sont parallèles aux asymptotes ; ces droites recoupent les cubiques aux points si de la conique à l'intersection avec les droites Isgiepi qui se coupent au point R de la conique. Ces 3 courbes sont des isocubiques circulaires focales de Van Rees, les foyers étant les 3 points Isg'i ; elles sont invariantes dans les transformations ψi de centres Isg'i qui échangent EPi et Isgi.

On peut aisément construire d'autres isocubiques circulaires circonscrites aux 5 points.

La 1ère a comme pivot le point à l'infini de la droite de Newton passant par les milieux des segments Xiψisg'i ; c'est aussi une cubique circulaire focale de Van Rees de foyer U. Son asymptote est la parallèle à la droite de Newton passant par le point T de la conique des 5 points. C'est l'isocubique jumelle de l'isocubique décrite au paragraphe précédent ; sa transformée ψ est la quartique jumelle de la quartique décrite au même paragraphe.



La 2nde a comme pivot le point V, point de concours des droites TicbTi et comme asymptote une parallèle à la droite VT ; elle passe par les 3 sommets Ti de DT et leurs 3 cb conjugués cbTi. Elle passe aussi par V et par le CB point des 5 points triples et des 3 points Ti.

La 3ème a comme pivot le point W, point de concours des droites TiIsg’i ; ce point est le conjugué isogonal de T par rapport à DT. Elle a comme asymptote une parallèle à TW et passe par les 3 points Isg’i et leurs cb conjugués ; elle passe aussi par le CB point des 5 points triples et des 3 points Isg’i.

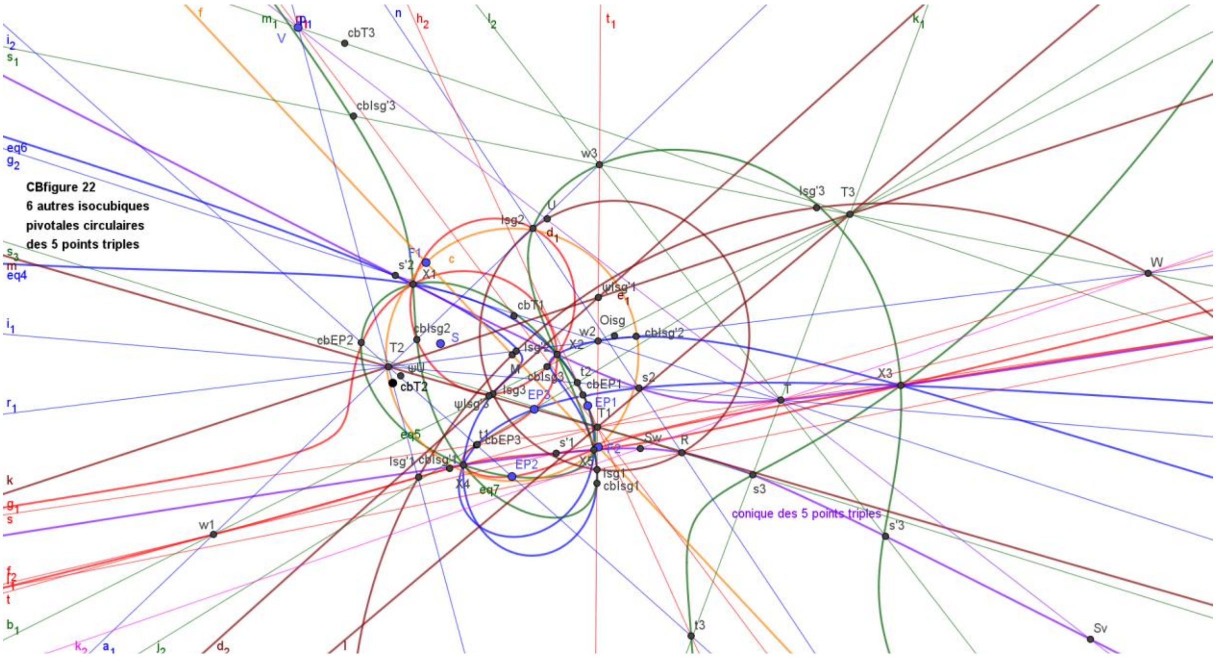
La figure 21 montre ces 3 cubiques et les 3 cubiques orthopivotales.

On va maintenant compléter la figure en utilisant les 3 cubiques orthopivotales de pivots Ti . On détermine les points cbTi, tangentiels des points Ti et les points cbEPi, cbIsgi et cbIsg’i comme 3èmes intersections des droites TiEPi, TiIsgi et TiIsg’i avec les 3 cubiques.

Comme on l’a vu, les droites TicbTi concourent en un point V et les droites TiIsg’i (qui portent cbIsg’i) en un point W. De plus, les droites TjEPj et TkEPk (qui portent cbEPj et cbEPk) se coupent en un point ti de TTi (qui recoupe la conique des 5 points en si) et les droites TjIsgj et TkIsgk (qui portent cbIsgj et cbIsgk) se coupent en un point wi de WTi (qui porte Isg’i et cbIsg’i et recoupe la conique des 5 points en s’i).

On peut dès lors tracer les 6 isocubiques circulaires circonscrites aux 5 points de pivots les 3 points ti et les 3 points wi ; les 3 1ères se coupent 2 à 2 aux points EPi et cbEPi et les 3 autres se coupent 2 à 2 aux points Isgi et cbIsgi et passent par les points Isg’i et cbIsg’i.

La figure 22 montre ces 6 isocubiques.



« … M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde. »

C.G.J. Jacobi, lettre (en français)
à Legendre, 2 juillet 1830
Gesammelte Werke, vol 1, Berlin
(Reimer), 1881, p.454

Exergue à l'ouvrage de Jean Dieudonné (membre fondateur du groupe Bourbaki)

Pour l'honneur de l'esprit humain Les mathématiques aujourd'hui Hachette 1987