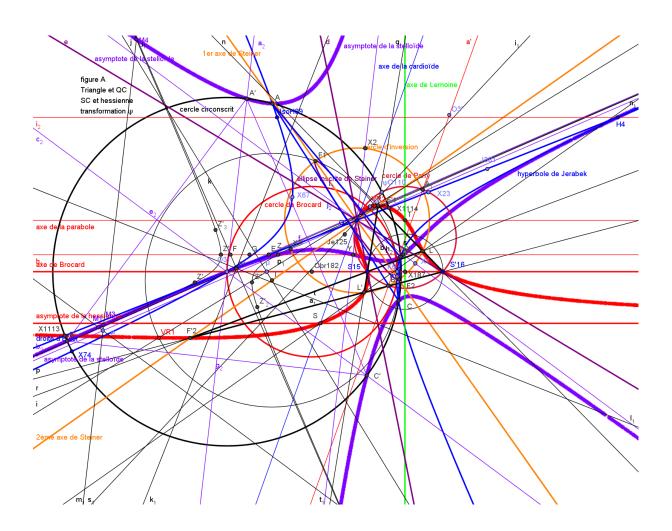
Bernard Keizer (bernard.keizer@wanadoo.fr)

# Le Triangle, le Quadrilatère Complet, la Stelloïde Cubique $et \; la \; transformation \; \Psi$



#### Résumé

Jamais deux sans trois : l'article fait suite aux deux articles précédents consacrés au quadrilatère complet et à la stelloïde cubique (\*). Il traite de la transformation  $\psi$  qui associe une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle centré sur l'axe de symétrie. Cette transformation peut être définie dans un triangle, où elle éclaire bon nombre de propriétés d'alignement et de cocyclicité, dans un quadrilatère complet ou à partir d'une stelloïde cubique et l'article explicite les liens entre ces trois figures et cette transformation. L'article utilise les notations de Encyclopedia of Triangle Centers de Clark Kimberling et Encyclopedia of Quadrifigures de Chris van Tienhoven (\*\*). Il doit beaucoup aux travaux de Bernard Gibert sur les cubiques (\*\*\*).

#### Abstract

All good things are three: the article is a follow up of the two previous articles dedicated to the complete quadrilateral and the cubic stelloïd (\*). It deals with the  $\psi$  transformation, which associates an axial symmetry with an inversion wrt a circle centered on the axis of the symmetry. This transformation can be defined in a triangle, where it brings out many properties of alignment or cocyclicity, in a complete quadrilateral or from a cubic stelloïd and the article shows the links between these three figures and this transformation. The article uses the notations of Encyclopedia of Triangle Centers by Clark Kimberling and Encyclopedia of Quadrifigures by Chris van Tienhoven (\*\*). It ows much to the works of Bernard Gibert on the cubics (\*\*\*).

#### Zusammenfassung

Aller guten Dinge sind drei : der Artikel ist eine Fortsetzung der zwei vorigen dem vollständigen Vierseit und der kubischen Stelloïde gewidmeten Artikeln (\*). Er handelt mit der  $\psi$  Transformation, die eine axiale Symetrie mit einer Inversion in einem Kreis, dessen Zentrum auf der Axis der Symetrie liegt, verbindet. Diese Transformation kann in einem Dreieck, wo sie manche Eigenschaften von Geraden und Kreisen erleuchtet, in einem vollständigen Vierseit oder von einer kubischen Stelloïde definiert werden und der Artikel zeigt die Verhältnisse zwischen diesen drei Figuren und dieser Transformation dar. Der Artikel benutzt die Notierungen von Clark Kimberling's Encyclopedia of Triangle Centers und von Chris van Tienhoven's Encyclopedia of Quadrifigures (\*\*). Er schuldet viel den Werken von Bernard Gibert über den Kubiken (\*\*\*).

(\*) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013 Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014

http://bernardkeizer.blogspot.fr

- (\*\*) Clark Kimberling Encyclopedia of Triangle Centers ou ETC <u>www.faculty.evansville.edu</u>, Chris van Tienhoven Encyclopedia of Quadrifigures ou EQF <u>www.chrisvantienhoven.nl</u>
- (\*\*\*) Bernard Gibert www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr

#### Sommaire

#### Introduction

Première partie : la transformation  $\psi$  et le triangle

- A) Géométrie du triangle
  - 1. Principaux points, droites et cercles du triangle
  - 2. Points isodynamiques S15 et S'16 et axes de Brocard et de Lemoine
  - 3. Triangles de Brocard et points de Steiner St99 et de Tarry T98
  - 4. Ellipses circonscrite et inscrite de Steiner de centre G2
  - 5. Hyperboles de Feuerbach, Kiepert, Jerabek et Stammler
  - 6. Hyperboles de Feuerbach et Kiepert du triangle antimédial du triangle orthique
- B) Transformation ψ du triangle
  - 1. Définition
  - 2. Propriétés générales
  - 3. Autres propriétés liées aux triangles de Brocard
  - 4. Construction avec O3 et H4: droite d'Euler G2O3 et droite G2T98
  - 5. Construction avec K6: droite G2K6 et droite G2St99
  - 6. Construction avec I1 : droite de Nagel G2I1 et droite G2X846

Seconde partie : la transformation Cl-S et le QC

- A) Géométrie du quadrilatère complet
  - 1. Principaux points, droites et cercles du QC
  - 2. Courbes usuelles du QC (parabole, cardioïdes et deltoïde)
- B) Transformation Cl-S du quadrilatère complet
  - 1. Définition
  - 2. QC et QC diagonal et quartiques et sextiques
  - 3. Paraboles associées et conjugaison isotomique

Troisième partie : la transformation  $\psi$ , la stelloïde cubique et sa hessienne

- A) Stelloïde cubique
  - 1. Définition et première construction de la courbe de Mac Cay
  - 2. Seconde construction de la courbe de Mac Cay
  - 3. Construction des courbes de Mac Cay et Kjp
  - 4. Conique polaire et transformation ψ
- B) Hessienne ou cubique circulaire focale de Van Rees
  - 1. Définition et première consctruction
  - 2. Autres constructions
  - 3. Stelloïde cubique, hessienne, poloconiques et autopoloconiques
- C) Liens entre le triangle, le QC, la SC et la transformation y
  - 1. Triangle GSS'
  - 2. Triangle de pivots principal de la SC
  - 3. OC inscrits dans la hessienne de Van Rees

Conclusion

Bibliographie

#### **Figures**

- Figure A Triangle et QC, SC et hessienne et transformation ψ
- Figure B Triangle et transformation  $\psi$  (construction de Steve Sigur)
- Figure C Transformation Cl-S et droites et cercles conjugués
- Figure D Quadrilatère complet, stelloïde cubique et hessienne de Van Rees
- Figure 1 Principaux points, droites et cercles du triangle
- Figure 2 Points isodynamiques S15 et S'16 et axes de Brocard et de Lemoine
- Figure 3 Cercle, points et triangles de Brocard et points de Steiner St99 et Tarry T98
- Figure 4 Ellipses circonscrite et inscrite de Steiner de centre G2
- Figure 5 Hyperboles de Feuerbach, de Kiepert, de Jerabek et de Stammler
- Figure 6 Hyperboles de Feuerbach et Kiepert de l'antimédial du triangle orthique
- Figure 7 Transformation w dans le triangle
- Figure 8 Propriétés de la transformation ψ
- Figure 9 Grand et petits triangles de Brocard
- Figure 10 Construction avec O3 et H4 : droite d'Euler G2O3 et droite G2T98
- Figure 11 Construction avec K6: droites G2K6 et G2St99
- Figure 12 Construction avec I1 : droite de Nagel G2I1 et droite G2X846
- Figure 13 Points, droites et cercles du quadrilatère complet
- Figure 14 Courbes usuelles du QC (parabole, cardioïdes et deltoïde)
- Figure 15 Transformation Cl-S dans le quadrilatère complet
- Figure 16 Transformations Cl-S, Cl-Sdiag et Cl-Ster
- Figure 17 Sextiques invariantes par Cl-S, Cl-Sdiag et Cl-Ster
- Figure 18 Paraboles associées et conjugaison isotomique
- Figure 19 Application au triangle et parabole de Kiepert
- Figure 20 Stelloïde cubique de Mac Cay (1<sup>ère</sup> construction)
- Figure 21 Stelloïde cubique de Mac Cay (2<sup>nde</sup> construction)
- Figure 22 Stelloïdes cubiques de Mac Cay et Kip
- Figure 23 Conique polaire et transformation ψ de la stelloïde cubique
- Figure 24 Coniques polaires dégénérées et hessienne (1<sup>ère</sup> construction)
- Figure 25 Cubiques circulaires focales de Van Rees (autres constructions)
- Figure 26 Stelloïde cubique, hessienne, poloconiques et autopoloconiques
- Figure 27 Triangle GSS'
- Figure 28 Recherche du triangle de pivots principal
- Figure 29 Quadrilatères complets inscrits dans la hessienne

#### Introduction

- J'ai toujours été fasciné par la géométrie du triangle et j'ai passé assez régulièrement de longues heures à partir des figures du regretté Steve Sigur sur le site paideiaschool en jouant avec les droites et les cercles décrits sur le site ETC de Clark Kimberling.
- J'ai retrouvé le même plaisir en travaillant sur la géométrie du quadrilatère complet en découvrant le site EQF de Chris van Tienhoven et le groupe de travail Quadriforum autour de Chris van Tienhoven et Eckart Schmidt.
- Un grand moment a été en particulier l'identification, au sein de ce groupe de travail, de la courbe lieu des centres des cardioïdes inscrites dans le QC (\*) comme la stelloïde cubique conjuguée du QC décrite par Jules Marchand (\*\*).
- Il me restait, pour boucler la boucle, à comprendre que la mystérieuse transformation décrite à partir de l'ellipse de Steiner du triangle et appelée ψ par Bernard Gibert (\*\*\*) et μ par Benedetto Scimemi (\*\*\*\*) était identique à la transformation dans le QC mentionnée par J.W. Clawson (\*\*\*\*\*) et appelée Clawson-Schmidt dans EQF.
- Ce dernier article s'articule dès lors en trois parties. La première rappelle d'abord rapidement les éléments nécessaires du triangle (points isodynamiques, axes de Brocard et de Lemoine, points, cercle et triangles de Brocard, points de Steiner et de Tarry, ellipses de Steiner et hyperboles équilatères de Feuerbach, Kiepert, Jerabek et Stammler) et donne une première définition de la transformation ψ à partir de l'ellipse inscrite de Steiner, éclairant au passage un certain nombre de propriétés d'alignement et de cocyclicité. La seconde reprend brièvement les éléments utiles du quadrilatère complet (point et cercle de Miquel, droites de Newton et de Steiner) et ses courbes usuelles (parabole, cardioïdes et deltoïde) et donne une seconde définition de la transformation Cl-S. La dernière partie présente enfin la stelloïde cubique associée au triangle ou conjuguée du quadrilatère complet et donne une troisième définition de la transformation ψ à partir des coniques polaires de cette courbe. Il ne reste plus alors qu'à expliciter les relations angulaires entre ces trois figures, triangle, quadrilatère complet et stelloïde cubique liées par une même transformation ψ.
  - (\*) Bernard Gibert Inscribed Cardioïds and Eckart Cubics 2013
  - (\*\*) Jules Marchand Géométrie du quadrilatère complet 1937
  - (\*\*\*) Bernard Gibert Orthocorrespondance and Orthopivotal Cubics Forum Geometricorum 2003
  - (\*\*\*\*) Benedetto Scimemi Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle Forum Geometricorum 2010
  - (\*\*\*\*\*) J.W. Clawson The Complete Quadrilateral 1919

#### **Avertissement**

On utilise, dans le cours de l'article, indifféremment les termes cévien ou pédal, mais on note qu'il s'agit d'un faux ami, le terme cevian en anglais signifiant pédal en français et le terme pedal en anglais signifiant podaire en français.

La figure ci-contre (\*) est inspirée des pages de vulgarisation publiées par le géomètre Steve Sigur (1946-2008) sur le site <a href="https://www.paideiaschool.org/teacherpages/Steve\_Sigur/geometry">www.paideiaschool.org/teacherpages/Steve\_Sigur/geometry</a>.

#### The Modern\* Geometry

#### of the **Triangle**

by Steve Sigur

This essay is designed to get you up to speed so you can read John Conway's descriptions of triangle geometry. These pages are designed to be viewed side by side, text on the left, pictures on the right. Acrobat can be set to view pages in this way.

\*In this context "modern" means less than 200 years old

Le livre The Triangle Book a été finalement publié par John H. Conway en 2013

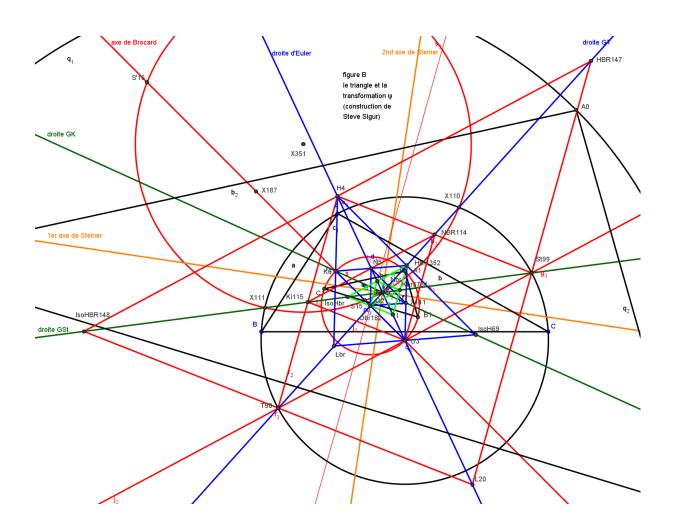
The Triangle Book John H. Conway-Steve Sigur A.K. Peters 2013

On pourra aussi se reporter à Modern Geometry of the Triangle Geogebrabook Steve Phelps.

(\*) Les éléments de construction de la figure sont expliqués page 18

### Première partie

# La transformation Ψ et le triangle



#### A) Géométrie du triangle

1. Principaux points, droites et cercles du triangle (figure 1)

On considère un triangle de sommets A, B et C; on utilise les notations ETC et on s'intéresse, dans l'ordre de la numérotation, aux points principaux. On note CoX et IsoX les conjugués isogonal et isotomique de X.

I1 centre du cercle inscrit

G2 centre de gravité

O3 centre du cercle circonscrit

H4 orthocentre, anticomplément de O3

N5 centre du cercle d'Euler, complément de O3

K6 point de Lemoine

Ge7 point de Gergonne

Na8 point de Nagel, complément de I1

M9 Mittenpunkt, complément de Ge7

Sp10 point de Spieker, anticomplément de I1

Fe11 point de Feuerbach, point de contact des cercles inscrit et d'Euler

Fe'12 conjugué harmonique de Fe11 par rapport à O3 et N5

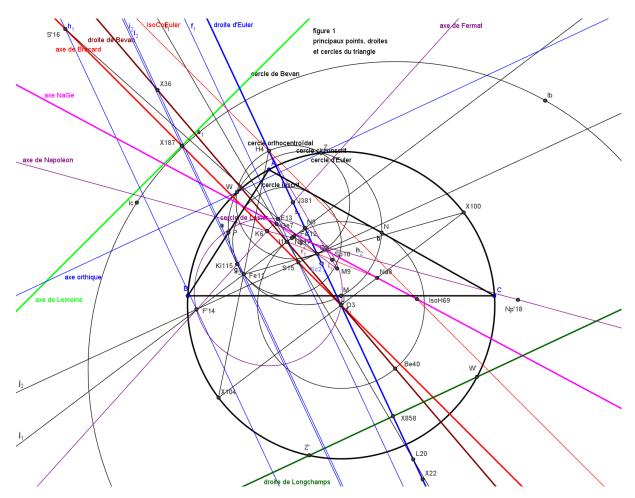
F13 et F'14 points de Fermat

S15 et S'16 points isodynamiques

Np17 et Np'18 points de Napoléon

Cl19 point de Clawson

L20 point de Longchamps, symétrique de H4/O3, anticomplément de N5



Sc21 point de Schiffler

Ex22 point d'Exeter, inverse de G2 par rapport au cercle d'Euler

X23 inverse de G2 par rapport au cercle circonscrit

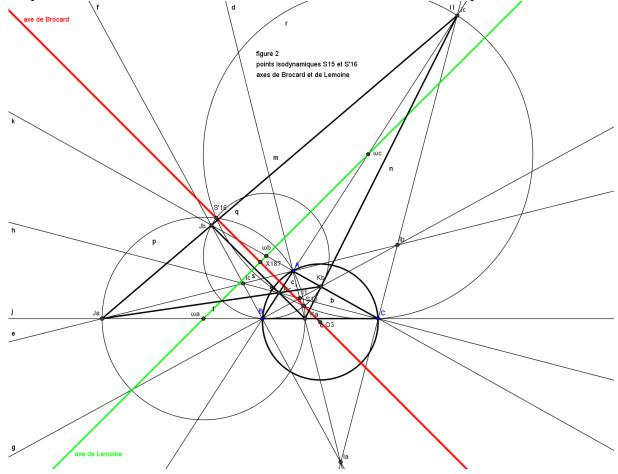
X25 CoIsoH, isogonal de l'isotomique IsoH69 de H4

# **2.** Points isodynamiques S15 et S'16 et axes de Brocard et de Lemoine (figure 2)

I, Ia, Ib et Ic sont les centres des cercles inscrit et exinscrits. Les bissectrices intérieures et extérieures des angles en A, B et C coupent les côtés opposés en Ja et Ka, Jb et Kb et Jc et Kc. Les cercles de diamètres JaKa, JbKb et JcKc et de centres  $\omega 1$ ,  $\omega 2$  et  $\omega 3$  constituent les 3 cercles d'Apollonius, lieu des points M tels que MB/MC = IaB/IaB = JaB/JaB = c/b ..., où a, b et c sont les mesures des côtés BC, AC et AB. Ces 3 cercles ont en commun les 2 points isodynamiques S15 et S'16 tels que aSA = bSB = cSC et aS'A = bS'B = cS'C.

L'application du théorème de Ménélaüs donne immédiatement les alignements I1, I2 et J3, I1, I3 et J2, I2, I3 et J1 et J1, J2 et J3. Les 6 points I1, I2, I3, J1, J2 et J3 forment un quadrilatère complet de triangle diagonal ABC; le cercle circonscrit est orthogonal aux 3 cercles d'Apollonius.

La droite de Newton du QC Δn est la médiatrice de S15S'16 ou axe de Lemoine du triangle; la droite de Steiner Δh est la droite S15S'16 ou axe de Brocard du triangle, qui passe par les points O3 et K6. Les 2 points S15 et S'16 sont les points de Plücker du QC. On verra dans la 2de partie que le point de Miquel de ce QC est le point de Kiepert Ki115, milieu du segment F13F'14; le point de Miquel de son QC diagonal, qui échange les points S15 et S'16 et le cercle circonscrit et l'axe de Lemoine, est le point X110.



# **3.** Triangles de Brocard et points de Steiner St99 et de Tarry T98 (figure 3)

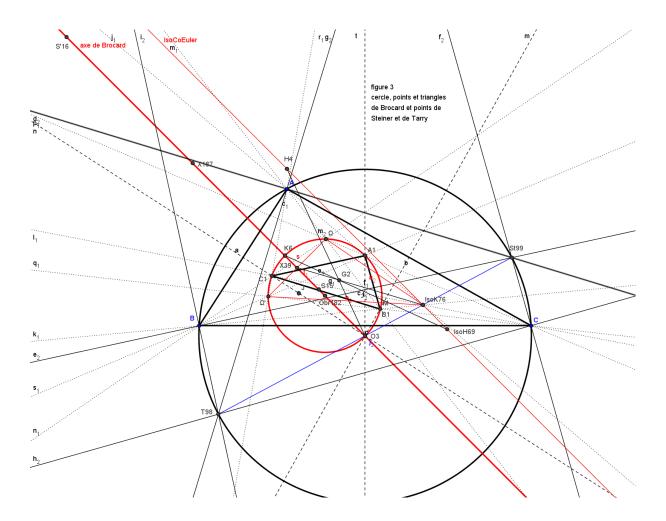
On appelle cercle de Brocard le cercle de diamètre O3K6; les parallèles aux 3 côtés BC, AC et AB menées par le point K6 ou les médiatrices de ces côtés, qui passent par le point O3, recoupent ce cercle en 3 points A1, B1 et C1.

Le triangle A1B1C1 est triplement en perspective avec le triangle ABC, les 3 centres de perspective étant les 2 points conjugués isogonaux  $\Omega$  et  $\Omega$ ' du cercle de Brocard, dont le milieu est le point X39, et le point IsoK76, anticomplément de X39 sur la droite H4IsoH69 parallèle à l'axe de Brocard. (Cette droite est la transformée IsoCo de la droite d'Euler).

On appellera A1B1C1 le petit triangle de Brocard (il s'agit du 1<sup>er</sup> triangle de Brocard, le 2<sup>nd</sup> étant A2B2C2, A2, B2 et C2 étant les 2ndes intersections de G2A1, G2B1 et G2C1 avec le cercle de Brocard).

Les parallèles aux côtés du 1<sup>er</sup> triangle de Brocard A1B1C1 par les sommets A, B et C du triangle de référence concourent au point de Steiner St99 du cercle circonscrit ; les perpendiculaires aux côtés du 1<sup>er</sup> triangle de Brocard A1B1C1 par les sommets A, B et C du triangle de référence concourent au point de Tarry T98, diamétralement opposé à St99 sur le cercle circonscrit.

On peut inverser l'opération et on appellera grand triangle de Brocard le triangle A0B0C0 dont ABC est le 1<sup>er</sup> triangle de Brocard ; il est immédiat par construction que T98 est le centre du cercle circonscrit à ce triangle et que St99 est son point de Lemoine, le cercle circonscrit à ABC étant son cercle de Brocard. (X23 est en outre son point X110, point de concours sur le cercle circonscrit des symétriques de la droite d'Euler par rapport aux côtés).



# **4.** Ellipses circonscrite et inscrite de Steiner de centre G2 (figure 4)

L'ellipse circonscrite de Steiner est centrée au point G2 et passe par les 3 sommets A, B et C du triangle ; elle recoupe le cercle circonscrit en un 4ème point, le point de Steiner St99, diamétralement opposé au point de Tarry T98 sur le cercle circonscrit.

L'ellipse inscrite de Steiner est le complément de l'ellipse circonscrite; elle est centrée au point G2, est tangente aux 3 côtés en leurs milieux et recoupe le cercle d'Euler en un 4ème point, le point de Kiepert Ki115, milieu du segment F13F'14 et complément de St99.

L'inverse du centre de gravité G2 par rapport au cercle circonscrit est le point X23 et le symétrique de ce point par rapport à l'axe de Lemoine est le point X110; le complément de X110 est le point de Jerabek Je125.

L'ellipse circonscrite est la conjuguée isogonale de l'axe de Lemoine.

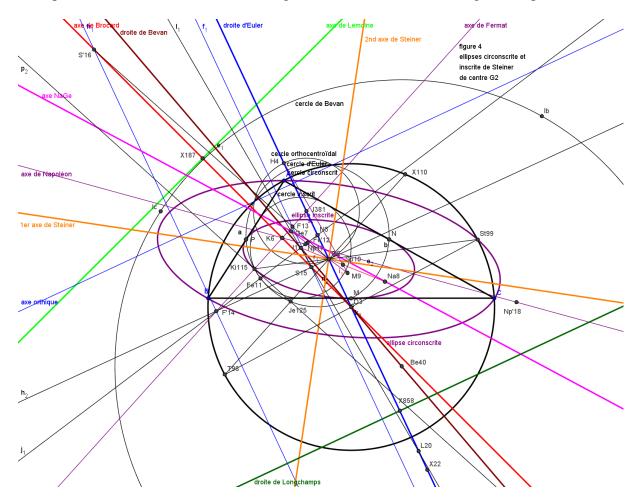
Les axes des 2 ellipses sont les bissectrices des angles <03G2T98> et <K6G2St99>.

La polaire du point de Lemoine K6 par rapport à l'ellipse inscrite de Steiner est l'axe orthique, axe radical des cercles circonscrit, d'Euler et orthocentroïdal (diamètre G2H4).

On considère les triangles def, podaire de I1 et pédal de Ge7, DEF, pédal de I1, MNP, médial ou podaire de O3 et pédal de G2, RST, orthique ou podaire et pédal de H4.

Les droites ST et NP se coupent en  $\alpha$ , RT et MP en  $\beta$  et MN et RS en  $\gamma$ ; M $\alpha$ , N $\beta$  et P $\gamma$  se coupent au point de Kiepert Ki115 et R $\alpha$ , S $\beta$  et T $\gamma$  au point de Jerabek Je125.

On appelle R0S0T0 le triangle antimédial du triangle orthique RST; ABC et R0S0T0 ont même cercle d'Euler, le centre du cercle circonscrit à R0S0T0 est l'orthocentre du triangle orthique, X52 dans ETC et son centre de gravité est aussi celui du triangle orthique, X51.



# **5.** Hyperboles équilatères de Feuerbach, Kiepert, Jerabek et Stammler (figure 5)

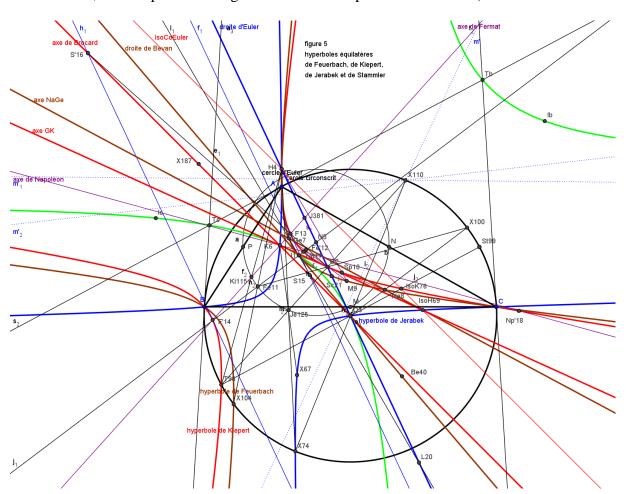
Les hyperboles équilatères passant par les sommets A, B et C et par l'orthocentre H4 constituent un faisceau ; elles sont les conjuguées isogonales d'un faisceau de droites passant par O3 et les conjuguées isotomiques d'un faisceau de droites passant par le point IsoH69.

Elles sont centrées en un point du cercle d'Euler et la 4<sup>ème</sup> intersection avec le cercle circonscrit est le point symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de l'hyperbole.

L'hyperbole de Feuerbach est centrée au point de Feuerbach Fe11 et passe par le centre du cercle inscrit I1et par les points de Gergonne Ge7 et Nagel Na8 et le Mittenpunkt M9 ; le symétrique de H4 par rapport à Fe11 est X104, celui de I1 est X80. Elle constitue la conjuguée isogonale de la droite de Bevan I1O3 (droite d'Euler du triangle de Bevan) et la conjuguée isotomique de la droite IsoCo I1O3 ou Ge7Na8, qui passe par IsoI75.

L'hyperbole de Kiepert est centrée au point Ki115 et passe par G2, Sp10, F13 et F'14, Np17 et Np'18 et IsoK76; le symétrique de H4 par rapport à Ki115 est le point de Tarry, T98. Elle constitue la conjuguée isogonale de l'axe de Brocard O3K6 et la conjuguée isotomique de la droite IsoCo O3K6 ou G2K6; ses asymptotes sont parallèles aux axes des ellipses de Steiner. L'hyperbole de Jerabek est centrée au point Je125 et passe par O3 et K6 et par le complément IsoH69 de K6; le symétrique de H4 par rapport à Je125 est X74, celui de K6 est X67. Elle constitue la conjuguée isogonale de la droite d'Euler et la conjuguée isotomique de la droite IsoCoEuler, parallèle à l'axe de Brocard qui passe par H4, IsoH69, IsoK76 et IsoO264.

Enfin, l'hyperbole de Stammler est l'hyperbole de Feuerbach du triangle tangentiel; elle est centrée au point X110 et passe par I1, O3 et K6 et par les sommets du triangle de Bevan et ceux du triangle tangentiel (pour ce triangle, O3 est le centre du cercle inscrit, I1 l'orthocentre, K6 son point de Gergonne et X110 son point de Feuerbach).



**6.** Hyperboles de Feuerbach et Kiepert du triangle antimédial du triangle orthique (figure 6)

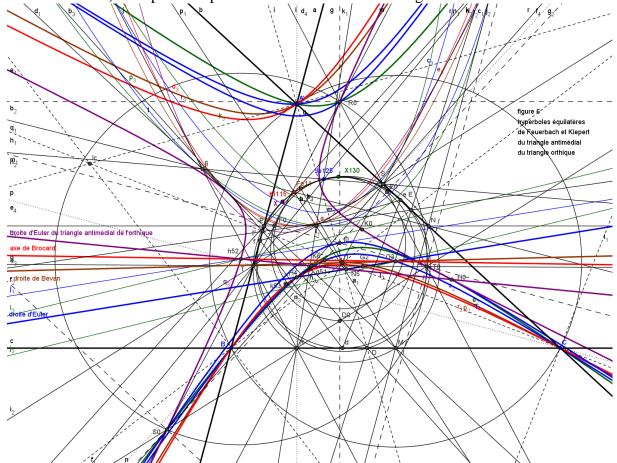
Tout point du cercle d'Euler de ABC et R0S0T0 (cf supra) est par construction à la fois :

- le centre de 2 paraboles inscrites dans les triangles médial MNP et orthique RST
- le centre de 2 hyperboles équilatères, l'une passant par A, B, C et H4 et l'autre par R0, S0, T0 et l'orthocentre H0 (symétrique de X52 par rapport à N5).

Le cercle inscrit de centre I1 est tangent au cercle d'Euler au point de Feuerbach Fe11 et tout point de ce cercle est le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle def; de même, tout point du cercle inscrit dans le triangle R0S0T0 et de centre I0 (anticomplément de H4 par rapport au triangle orthique) est le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle R0S0T0.

Enfin, le cercle pédal de I1 passe par les points Fe11 et Ki115 et tout point de ce cercle est le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle DEF; de même, le cercle pédal de I0 pour le triangle R0S0T0 passe par les points Je125 et X130 et tout point de ce cercle est le foyer d'une parabole inscrite dans le triangle pédal de I0 par rapport au triangle R0S0T0.

- le point de Feuerbach Fe11 est le centre de l'hyperbole de Feuerbach de ABC et le foyer d'une parabole de directrice I1O3 inscrite dans les 3 triangles def, DEF et MNP
- le point de Kiepert Ki115 est le centre de l'hyperbole de Kiepert de ABC et le foyer d'une parabole de directrice O3K6 inscrite dans les 3 triangles DEF, MNP et RST
- le point de Jerabek Je125 est le point de Feuerbach de R0S0T0, centre des hyperboles correspondantes de ces 2 triangles et foyer de 2 paraboles de directrices la droite d'Euler O3H4 et sa parallèle h52I0 et inscrites dans les triangles MNP et RST.
- le point X130 est le point de Kiepert de R0S0T0 et le centre de son hyperbole de même nom, qui passe par R0, S0, T0, H0 et g51 et par A, B, C et H4 (point de Spieker de R0S0T0) et le foyer de 2 paraboles de directrices h2K0 (droite de Brocard de R0S0T0) et sa parallèle par O3 et inscrites dans les triangles MNP et RST.



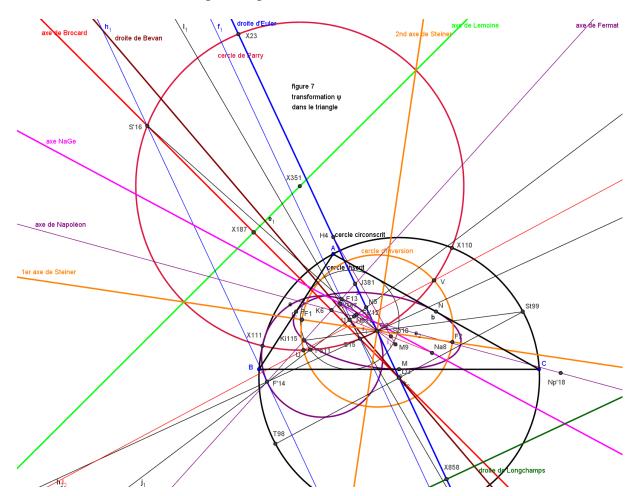
#### B) Transformation Ψ du triangle

### **1.** Définition (figure 7)

La transformation  $\psi$  pour le triangle est une involution associant une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle ; elle a 2 points invariants F1 et F2, qui sont les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner, le centre du cercle d'inversion est le point G2, milieu du segment F1F2 et centre de gravité du triangle, l'axe de symétrie ou 1<sup>er</sup> axe de Steiner est la droite F1F2 et la médiatrice du segment F1F2 est le 2<sup>nd</sup> axe de Steiner.

#### Cette transformation associe

- à un point P l'inverse P' par rapport au cercle d'inversion du symétrique de P par rapport à l'axe de symétrie :  $\psi(P) = inv(symP/axe de Steiner)/cercle d'inversion$
- à une droite passant par G2 une droite symétrique par rapport à l'axe de symétrie
- à une droite ne passant pas par G2 un cercle passant par G2, le centre du cercle étant le transformé ψ du symétrique de G2 par rapport à la droite et inversement
- à un cercle ne passant pas par G2 un autre cercle ne passant pas par G2, le centre de chacun des 2 cercles étant le transformé ψ de l'inverse de G2 par rapport à l'autre
- ceci est un cas particulier d'une propriété plus générale : si 2 points sont inverses par rapport à un cercle, leurs transformés ψ sont inverses par rapport au cercle transformé ψ de ce cercle – on note ψ[inv(P)/cercle C] = inv[ψ(P)]/ψ(C)
- P et  $\psi(P)$  sont sur 2 cercles de Steiner de 2 faisceaux orthogonaux, le 1<sup>er</sup> centré sur le  $2^{nd}$  axe de Steiner et passant par F1 et F2 et le  $2^{nd}$  centré sur le  $1^{er}$  axe de Steiner



### **2.** Propriétés générales (figure 8)

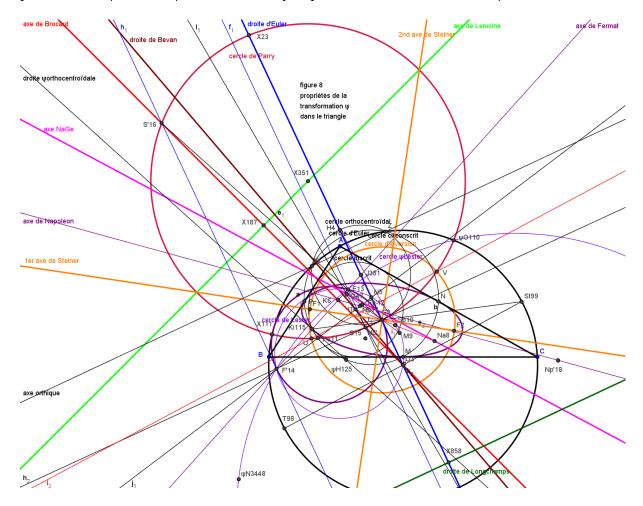
#### La transformation $\psi$ échange :

- les points de Fermat F13 et F'14 (sur 2 cercles, l'un par F1 et F2 et centré sur le 2<sup>nd</sup> axe de Steiner et l'autre, orthogonal au 1<sup>er</sup> et centré sur le 1<sup>er</sup> axe de Steiner)
- les points isodynamiques S15 et S'16 (idem)
- le cercle circonscrit et le cercle de Brocard de diamètre O3K6
- le cercle de Parry et l'axe de Brocard
- les droites G2O3 et G2T98, symétriques par rapport aux axes de Steiner (cf §3)
- les droites G2K6 et G2St99, symétriques par rapport aux axes de Steiner (cf §4)
- les droites G2I1 et G2X846, symétriques par rapport aux axes de Steiner (cf §5)

S15 et S'16 sont conjugués ψ et inverses par rapport aux 2 cercles circonscrit et de Brocard.

F13 et F'14 sont conjugués  $\psi$  et inverses par rapport au cercle orthocentroïdal de diamètre G2H4 et de centre J381 et symétriques par rapport à la droite qui est son transformé  $\psi$  et passe par leur milieu Ki115 et par le transformé Je125 de H4. Les droites F13S'16 et F'14S15 sont parallèles à la droite d'Euler et la droite F13F'14 ou axe de Fermat est parallèle à la droite G2T98, symétrique de la droite d'Euler par rapport aux axes de Steiner.

Le cercle qui passe par G2, F13 et F'14 est le transformé  $\psi$  de l'axe de Fermat ; il est tangent à la droite d'Euler en G2. On a  $JG^2 = JF.JF'$  et, comme  $JG^2 = JO.JN$ , JF.JF' = JO.JN et les 4 points F, F', O et N sont cocycliques sur le cercle de Lester ; les transformés  $\psi$  de ces 4 points, F, F',  $\psi$ O110 et  $\psi$ N3448 sont cocycliques sur le cercle transformé  $\psi$ Lester.



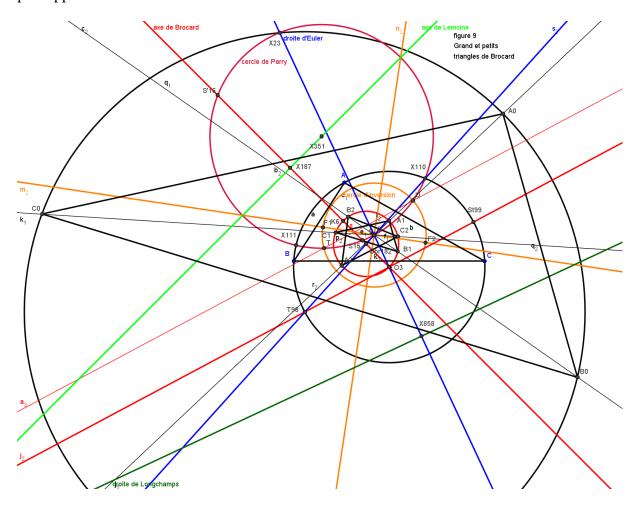
### **3.** Autres propriétés liées aux triangles de Brocard (figure 9)

Les transformés  $\psi$  des sommets du triangle ABC sont les sommets du  $2^{nd}$  triangle de Brocard A2B2C2 ; ce triangle est en perspective de centre G2 avec le  $1^{er}$  triangle de Brocard A1B1C1. Dans la transformation  $\psi$ , on a GA.GA2 = GB.GB2 = GC.GC2 et dans la perspective, on a GA1.GA2 = GB1.GB2 = GC.GC2 et il vient GA1/GA = GB1/GB = GC1/GC ; on a, de même, avec le grand triangle de Brocard (cf supra), GA0/GA = GB0/GB = GC0/GC.

Les 2 triangles A0B0C0 et A1B1C1, grand et petit triangles de Brocard, sont homothétiques dans une homothétie de centre G2 et semblables au triangle ABC dans des similitudes associant une symétrie axiale par rapport aux axes de Steiner et une homothétie de centre G2. Pour tout point X du triangle de référence ABC, on associe les 2 points correspondants des petit et grand triangles de Brocard Xbr et XBR; ces 2 points sont sur la droite G2  $\psi$ (X) et leurs transformés  $\psi$ ,  $\psi$ (Xbr) et  $\psi$ (XBR) sont sur la droite G2X. On a G2X² = G2Xbr.G2XBR et le cercle passant par X, Xbr et XBR est tangent en X à G2X et, de même, le cercle passant par  $\psi$ (X),  $\psi$ (Xbr) et  $\psi$ (XBR) est tangent en  $\psi$ (X) à G2  $\psi$ (X).

Pour toute droite remarquable du triangle ABC, les droites correspondantes des petit et grand triangles de Brocard sont parallèles et sont sur une direction symétrique de celle de ABC par rapport aux axes de Steiner.

La propriété des points correspondants s'étend aux centres des cercles correspondants : le centre Y du cercle transformé  $\psi$  d'un cercle C de centre X ne passant pas par G2 est le transformé  $\psi$  de l'inverse de G2 par rapport au cercle, situé sur la droite symétrique de G2X par rapport aux axes de Steiner.



# **4.** Construction avec O3 et H4 : droite d'Euler G2O3 et droite G2T98 (figure 10)

La droite symétrique de la droite d'Euler du triangle ABC par rapport aux axes de Steiner est la droite d'Euler des triangles A1B1C1 et A0B0C0 ; elle passe par le point T98 ou OBR.

On commence avec O3: la droite d'Euler contient G2, O3,  $\psi(\text{Obr}182) = X23$  et  $\psi(\text{T98})$ ,  $2^{\text{nd}}$  point d'intersection de la droite d'Euler avec le cercle de Brocard; la droite symétrique contient  $\psi\text{O}110$ , Obr182 et OBR, çàd T98.

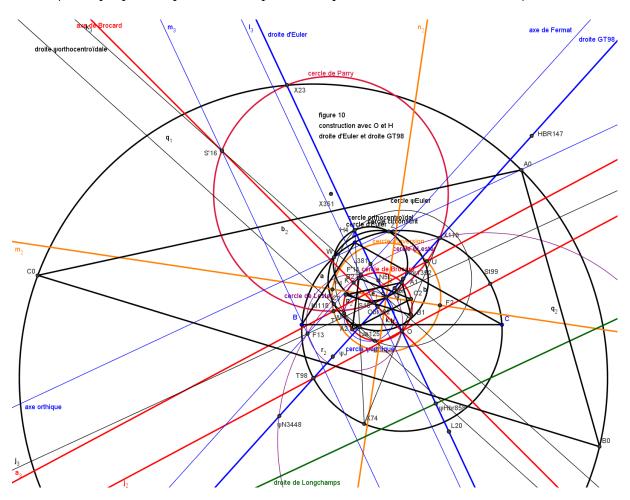
H4 est l'anticomplément de O3 : la droite d'Euler contient H4,  $\psi(\text{Hbr}1352) = X858$ , complément de X23 et  $\psi(\text{HBR}147)$ , complément de  $\psi(\text{T98})$ ; la droite symétrique contient  $\psi(\text{H4}) = \text{Je}125$ , complément de X110, Hbr1352, anticomplément de Obr182 et HBR147, anticomplément de T98.

N5 est le complément de O3 : la droite d'Euler contient N5,  $\psi(Nbr)$  = anticomplément de X23 et  $\psi(NBR)$ , anticomplément de  $\psi(T98)$ ; la droite symétrique contient  $\psi(N5) = \psi N3448$ , anticomplément de X110, Nbr, complément de Obr182 et NBR114, complément de T98.

Le cercle d'Euler a pour centre N5 et passe par Je125 ; son transformé  $\psi$  est un cercle de centre le transformé  $\psi$  de l'inverse de G2 par rapport au cercle d'Euler,  $\psi(X858) = Hbr1352$  et passant par H4.

On peut continuer en appliquant la même méthode aux points J381, symétrique de O3 par rapport à G2, ou L20, anticomplément de H4 ...

Les 3 cercles circonscrit, d'Euler et orthocentroïdal se coupent en 2 points W et Z (réels si l'angle en A est obtus); WZ est leur axe radical ou axe orthique. Leurs transformés  $\psi$ , le cercle de Brocard, le cercle  $\psi$ (Euler), la médiatrice Ki115Je125 du segment F13F'14 et le cercle  $\psi$ orthique passant par G2 se coupent aux 2 points W' et Z', transformés  $\psi$  de W et Z.



# **5.** Construction avec K6 : droite G2K6 et G2St99 (figure 11)

La droite symétrique de la droite G2K6 du triangle ABC par rapport aux axes de Steiner est la droite GK des triangles A1B1C1 et A0B0C0; elle passe par le point St99 ou KBR.

On commence avec K6: la droite G2K6 contient K6,  $\psi$ (Kbr3734) et  $\psi$ (St99),  $2^{nd}$  point d'intersection de la droite G2K6 avec le cercle de Brocard; la droite symétrique contient  $\psi$ K111, Kbr3734 et KBR, càd St99.

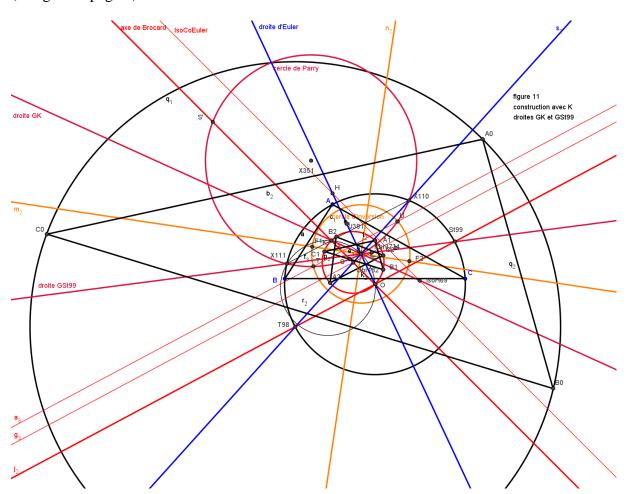
(Obr182Kbr3734 est parallèle à OBRKBR, çàd T98St99, la direction de ces 2 droites étant symétrique de celle de O3K6 par rapport aux axes de Steiner, ce qui détermine Kbr3734).

IsoH69 est l'anticomplément de K6 : la droite G2K6 contient IsoH69,  $\psi$ [(IsoH)br], complément de  $\psi$ (Kbr3734) et  $\psi$ [(IsoH)BR], complément de  $\psi$ (St99) ; la droite symétrique contient  $\psi$ (IsoH69) = X126, complément de  $\psi$ K111, (IsoH)br, anticomplément de Kbr3734 et (IsoH)BR, anticomplément de T98.

X141 est le complément de K6 : la droite G2K6 contient X141,  $\psi$ [X141(br)], anticomplément de  $\psi$ (Kbr3734) et  $\psi$ [X141(BR)], anticomplément de  $\psi$ (St99) ; la droite symétrique contient  $\psi$ (X141), anticomplément de  $\psi$  K111, X141(br), complément de Kbr3734 et X141(BR), complément de T98.

Pour illustrer ces propriétés de correspondance et de symétrie, on considère pour le triangle ABC le triangle O3K6Hbr1352 (en bleu), son triangle médial N5X141Obr1352 et son triangle antimédial H4IsoH69Lbr (Lbr symétrique de Hbr1352 par rapport à Obr182, de IsoH69 par rapport à O3 et de H4 par rapport à K6 et point de Longchamps du triangle A1B1C1).

On construit les triangles équivalents des triangles A1B1C1 (en vert) et A0B0C0 (en rouge). Les 9 triangles sont semblables et ont évidemment G2 comme centre de gravité commun. (cf figure B page 7)



# **6.** Construction avec I1 : droite de Nagel G2I1 et droite G2X846 (figure 12)

La droite symétrique de la droite G2I1du triangle ABC par rapport aux axes de Steiner est la droite GI des triangles A1B1C1 et A0B0C0; elle passe par le point X846 (sur I1Sc21).

On commence avec I1 : la droite G2I1 contient I1,  $\psi(Ibr3923)$  et  $\psi(IBR1281)$  ; la droite symétrique contient  $\psi I1054$ , Ibr3923 et IBR1281.

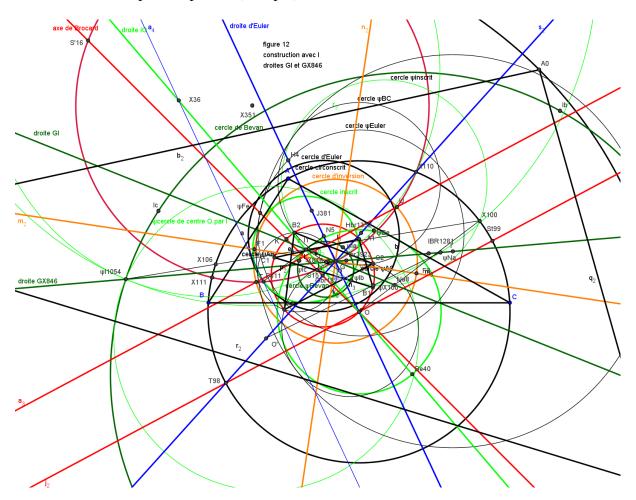
Na8 est l'anticomplément de II : G2I1 contient Na8,  $\psi$ (Nabr), complément de  $\psi$ (Ibr3923) et  $\psi$ (NaBR), complément de  $\psi$ (IBR1281); G2X846 contient  $\psi$ (Na8), complément de  $\psi$ I1054, Nabr, anticomplément de Ibr3923 et NaBR, anticomplément de IBR1281.

Sp10 est le complément de II : G2I1 contient Sp10,  $\psi(Spbr)$  = anticomplément de  $\psi(Ibr3923)$  et  $\psi(SpBR)$ , anticomplément de  $\psi(IBR1281)$  ; G2X846 contient  $\psi(Sp10)$ , anticomplément de  $\psi(IDS4)$ , Spbr, complément de Ibr3923 et SpBR, complément de IBR1281.

On trace le cercle de centre O3 passant par I1 ; la formule d'Euler  $OI^2 = R(R-2r)$  permet de déterminer le point X100, inverse de Na8 par rapport à ce cercle (X100 étant sur le cercle circonscrit). Le cercle passant par I1, Na8 et X100 est tangent en I1 à la droite O3I1. X106 est la  $2^{nde}$  intersection de la droite I1X100 avec le cercle circonscrit ;  $\psi$ I1054 est le symétrique de I1 par rapport à X106, il est situé sur le cercle de Bevan.

Na et X100 étant inverses par rapport au cercle de centre O3 passant par I1, leurs conjugués  $\psi$  Na, complément de  $\psi$ I1054 et  $\psi$ (X100) = X1083 sur le cercle de Brocard sont inverses par rapport au cercle conjugué  $\psi$  du cercle précédent.

Le cercle inscrit est tangent aux 3 côtés et au cercle d'Euler ; son conjugué  $\psi$  est un cercle centré sur G2X846 tangent aux 3 cercles G2B2C2, G2A2C2 et G2A2B2 et au cercle  $\psi$ (Euler) de centre Hbr1352 passant par H4 (cf supra).

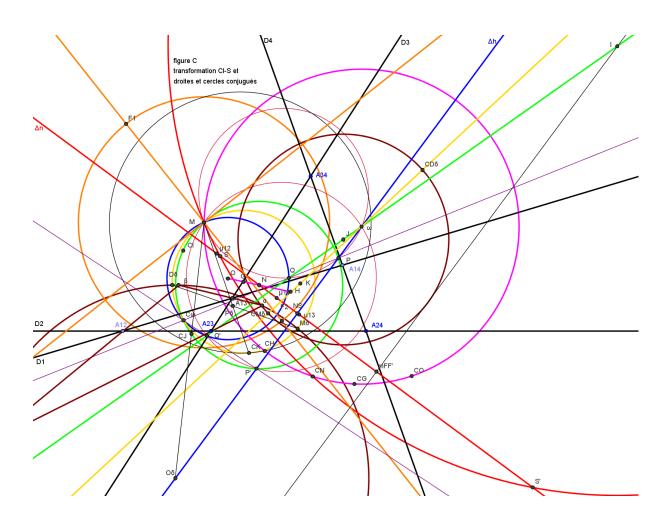


### Tableau de correspondance

Points	X	$\psi(Xbr)$	$\psi(XBR)$	$\psi(X)$	Xbr	XBR
1	<b>I</b> 1		ψΙ1054	X3923	X1281	
3	О3	X23	ψΤ1316	ψΟ110	Obr182	T98
4	H4	X858		ψΗ125	Hbr1352	HBR147
5	N5			ψN3448	Nbr	NBR114
6	K6			ψ <b>K</b> 111	Kbr3734	St99
8	Na8			ψNa		NaBR5992
10	Sp10			ψSp		SpBR5988
13	F13			X'14	Fbr3642	FBR5978
14	F'14			X13	F'br3643	F'BR5979
15	S15			S'16		SBR5980
16	S'16			S15		S'BR5981
20	L20					LBR5984
22	Ex22	ψExbr186	6		Exbr184	ExBR5986
69	IsoH69			X126	X2549	X148
100	X100			X1083	X5091	X5990
Droites Di		Di		ψ(Di)		
	G	iler 2K6 2H		G2T98 G2St99 G2X846		
Cercle	s	Ci centr	re points	ψ(Ci)	centre	points
	circons Euler inscrit	03 N5 I1	ψΟ110ψΚ111 ψΗ125 Fe	ψ(Euler) ψ(inscrit)	Obr182 Hbr1352 ψFe	O3 et K6 H4
Lester cercle (O3,1 Bevan		O3,I1) O3 Be40	O3N5F13F'15 I1 Ia-Ib-Ic	ψ(Lester) ψ(Bevan)	F13F'14ψO110ψN ψI1054 I1 et ψIa,ψIb,ψIc	

### Seconde partie

### La transformation Cl-S et le quadrilatère complet

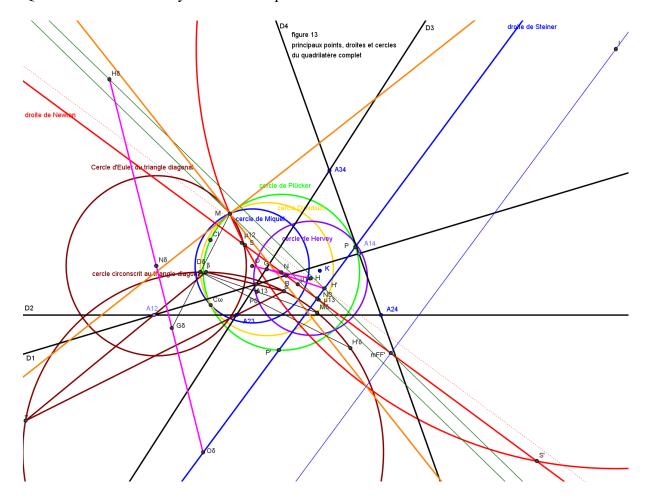


#### A) Géométrie du quadrilatère complet

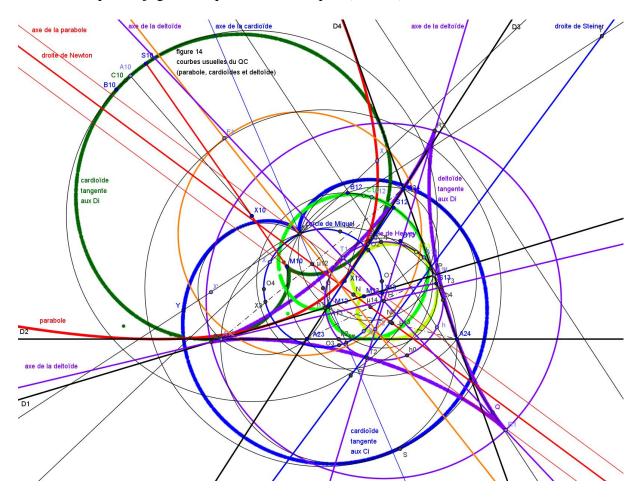
1. Principaux points, droites et cercles du quadrilatère complet (figure 13)

On considère un QC formé par 4 droites Di ; les intersections sont les 6 sommets Aij. On utilise les notations EQF et on s'intéressera aux points principaux suivants :

- QL-P1 M point de Miquel, foyer de la parabole inscrite
- QL-P2 H' point de Morley
- QL-P3 H point de Kantor-Hervey, centre du cercle de Hervey
- QL-P4 O centre centrique, centre du cercle de Miquel
- QL-P5 N milieu de OH, centre du cercle de Plücker
- QL-P6 G point Dimidium, milieu de ON et centre du cercle Dimidium
- QL-P7 NS point Newton-Steiner, intersection des droites de Newton et de Steiner
- QL-P8 Gδ centre de gravité du triangle diagonal DT
- QL-P9 Oδ centre du cercle circonscrit du triangle diagonal DT
- QL-P10 Hδ orthocentre du triangle diagonal DT
- QL-P11 No centre du cercle d'Euler du triangle diagonal DT
- QL-P12 Ba barycentre des 6 sommets du QC
- QL-P13 Pδ centre de perspective entre le 1<sup>er</sup> et le 2<sup>nd</sup> triangle diagonal
- QL-P17 Mδ point de Miquel du QC diagonal
- QL-P24 D8 2<sup>nd</sup> point d'intersection du cercle Dimidium avec le cercle circonscrit à DT
- QL-P25 foyer de la parabole associée-complément du point M8 ou P17 par rapport à DT
- QL-P26 K point de Lemoine du QC
- QL-2P1 a et b P et P' points de Plücker sur la droite de Steiner
- QL-2P2 a et b S et S' foyers de la conique inscrite centrée sur la droite de Newton



- **2.** Courbes usuelles du quadrilatère complet (parabole, cardioïdes et deltoïde) (figure 14)
- Les milieux des diagonales AijAkl sont alignés sur une droite Δn, appelée droite de Newton; les 3 cercles de diamètres AijAkl se coupent en 2 points, dits de Plücker.
- Les 4 orthocentres Hi des triangles de référence sont alignés sur une droite Δh, appelée droite de Steiner, qui contient les 2 points de Plücker et le centre Oδ du cercle circonscrit au triangle diagonal.
- Les 4 cercles circonscrits passent par un même point M, appelé point de Miquel ; leurs centres Oi et le point M sont sur un même cercle de centre O, appelé cercle de Miquel.
- Les médiatrices des segments OiHi concourent au point H, dit de Kantor-Hervey.
- Le cercle de centre N, milieu de OH situé sur la droite de Newton, est le cercle de Plücker et passe par M et les points de Plücker; le cercle de centre G, milieu de ON et passant par M est le cercle Dimidium.
- Le cercle de centre H symétrique du cercle de Miquel par rapport à N est le cercle de Hervey.
- La parabole de foyer M et de directrice  $\Delta h$  est tangente aux 4 droites.
- La cardioïde de centre O et de point de rebroussement M est tangente aux 4 cercles ; elle est la transformée Clawson-Schmidt de la parabole (cf infra).
- La deltoïde ou hypocycloïde à 3 rebroussements tangente aux 4 droites admet le cercle de Hervey comme cercle intérieur.
- Il existe 27 cardioïdes tangentes aux 4 droites; leurs centres sont sur la stelloïde cubique conjuguée du quadrilatère complet (cf infra).



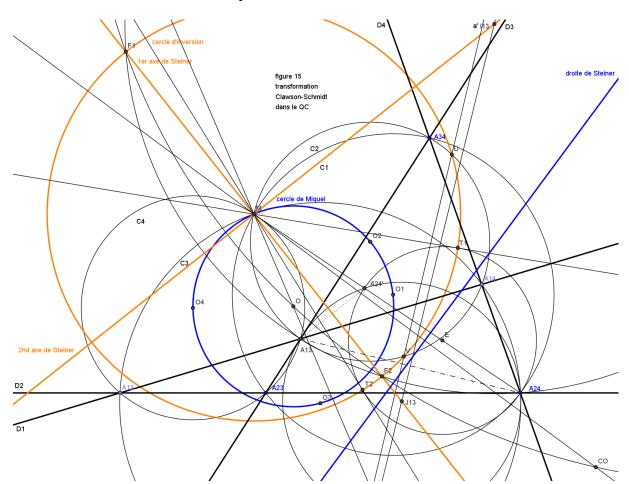
#### B) Transformation Cl-S du quadrilatère complet

# **1.** Définition (figure 15)

La transformation Cl-S pour le QC, appelée QL-Tf1 ou Clawson-Schmidt dans EQF, se définit comme celle du triangle comme une involution associant une symétrie axiale et une inversion par rapport à un cercle centré sur l'axe de symétrie.

Elle a 2 points invariants F1 et F2, QL-2P3 a et b de EQF, points de base ou de Poncelet des 8 cercles de Steiner passant par les 16 centres des cercles inscrit et exinscrits des 4 triangles de référence (4 points sur chaque cercle et 2 cercles par chaque point, 1 dans chaque faisceau). L'axe de symétrie est la droite F1F2 ou 1<sup>er</sup> axe de Steiner, la médiatrice de F1F2 est le 2<sup>nd</sup> axe de Steiner ; ce sont les bissectrices de l'angle entre les axes de la parabole et de la cardioïde. Le cercle d'inversion est le cercle de diamètre F1F2 et de centre le point de Miquel M. La transformation Cl-S échange :

- les sommets opposés Aij et Akl du QC
- les 4 droites Di et les 4 cercles circonscrits aux triangles de référence et les symétriques de M par rapport aux 4 droites et les centres de ces 4 cercles
- la droite de Steiner Δh et le cercle de Miquel et le symétrique de M par rapport à Δh et le centre O du cercle de Miquel
- les 2 points de Plücker P et P' et 2 points Q et Q' du cercle de Miquel
- la droite de Newton Δn et un cercle centré sur QQ'
- le cercle de Plücker et la droite OO'
- le cercle Dimidium et une droite qui passe par le point d'intersection ω de QQ' avec
  Δh; cette droite contient le point K de Lemoine



- 2. QC et QC diagonal et quartiques et sextiques
- a. QC et QC diagonal et Cl-S et Cl-Sdiag (figure 16)

Pour un triangle quelconque ABC, on peut toujours définir 3 transformations  $\psi$ , chacune étant centrée en un sommet et échangeant les 2 autres ainsi que le côté opposé et le cercle circonscrit. Chaque transformation est le produit des 2 autres et le produit des 3 transformations est l'identité.

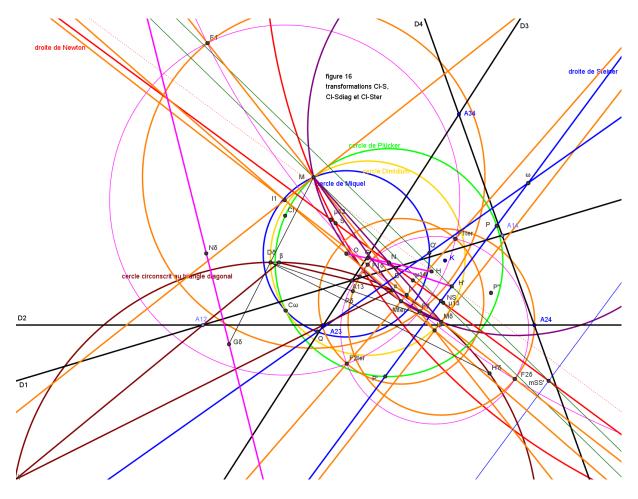
Pour un QC ordinaire, on définit le QC diagonal formé par les 3 diagonales et la droite de Newton ; ce QC diag détermine à son tour une Cl-Sdiag avec 2 points invariants  $F1\delta$  et  $F2\delta$ .

La Cl-Sdiag échange les 2 points de Plücker P et P', leurs 2 conjugués Cl-S Q et Q' et, par définition, la droite de Newton du QC et le cercle circonscrit au triangle diagonal DT.

Le centre de cette Cl-Sdiag est le point M $\delta$  ou P17 de EQF, milieu du segment F1 $\delta$ F2 $\delta$  et foyer d'une parabole inscrite dans le triangle diagonal et tangente à la droite de Newton  $\Delta n$ ; la directrice est la droite H $\delta$ H' ou L $\delta$  de EQF, qui coupe  $\Delta n$  au milieu de SS'.

Mδ est l'un des points d'intersection du cercle Dimidium avec le cercle circonscrit à DT. Le transformé Cl-S de Mδ coïncide avec le transformé Cl-Sdiag de M ; Cl-Sdiag(M) = Cl-S(Mδ) On applique la définition des 3 transformations au triangle MMδMter ; la  $3^{\text{ème}}$  transformation a pour centre Mter et échange M et Mδ et la droite MMδ et le cercle circonscrit à DT.

Les 3 paires d'axes de Steiner sont les bissectrices du triangle ; les 3 1<sup>er</sup> axes se coupent au centre du cercle inscrit et les 3 2<sup>nd</sup> axes se coupent aux centres des cercles exinscrits. Chacun des 3 couples de points invariants est sur 2 cercles centrés en un de ces centres de cercles exinscrits et sur un 3<sup>ème</sup> cercle passant par les centres des 2 autres transformations.



### b. Quartiques et sextiques invariantes par Cl-S et Cl-Sdiag (figure 17)

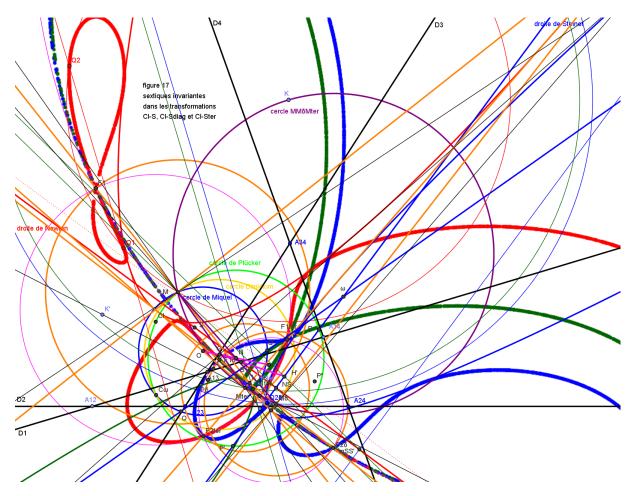
On a déjà vu, dans le 2<sup>nd</sup> article, la quartique des points de Plücker généralisés comme lieu des points Cl-S conjugués déterminés comme intersection des tangentes à une conique Co centrée au point G', pôle de MMô par rapport au cercle Dimidium, avec leurs cercles conjugués CSC, dont les centres décrivent une hyperbole équilatère centrée au point Dimidium G.

La conique Co est inscrite dans le triangle diagonal, tangente aux 2 paires d'axes de Steiner des transformations Cl-S et Cl-Sdiag et à la droite de Steiner PP' et à la droite QQ'.

L'hyperbole équilatère HypEq est le lieu des centres des coniques passant par les 4 centres des cercles circonscrits Oi ; elle passe par les milieux des côtés et des diagonales du QA des Oi et par les sommets de son triangle diagonal (conique des 9 points) et par les points O et N. La quartique est globalement invariante dans les 3 transformations Cl-S, Cl-Sdiag et Cl-Ster et passe par les 2 paires de points invariants F1 et F2 et F1 $\delta$  et F2 $\delta$ .

On peut généraliser ces quartiques à partir de 3 familles de coniques tangentes à 2 des 3 paires d'axes de Steiner et centrées sur la médiatrice du segment joignant leurs 2 centres ; ces quartiques passent par les 2 paires de points invariants correspondants et sont toutes globalement invariantes dans les 3 transformations Cl-S, Cl-Sdiag et Cl-Ster.

La figure ci-dessous montre les 3 sextiques obtenues en prenant comme coniques les 3 paraboles tangentes à 2 des 3 paires d'axes de Steiner; elles ont pour foyers les 3 sommets M, M\delta et Mter et pour directrices les 3 côtés MδMter, MMter et MMδ. Les cercles transformés des tangentes aux paraboles sont centrés sur le cercle circonscrit au triangle MMδMter. Chaque sextique est tangente à sa parabole en 4 points et invariante dans sa 3 transformation et les 6 sextiques passent par les 3 paires de points invariants.



- 3. Paraboles associées et conjugaison isotomique
- a. Parabole inscrite et parabole associée (figure 18)

La parabole inscrite dans le QC, appelée QL-Co1 dans EQF a pour foyer le point de Miquel M, QL-P1 de EQF et pour directrice la droite de Steiner  $\Delta h$ , QL-L2 de EQF. Il passe par les 4 points de contact avec les 4 droites Di une seconde parabole associée, appelée QL-Co3 dans EQF, complément par rapport au triangle diagonal de la parabole  $\Gamma$  inscrite dans le QC diagonal ; elle a pour foyer le complément du point M $\delta$  ou P17 de EQF, çàd le point M' ou P25 de EQF et pour directrice la parallèle par O $\delta$  à la droite H $\delta$ H' ou L $\delta$  de EQF, directrice de  $\Gamma$  et droite de Steiner du QC diagonal.

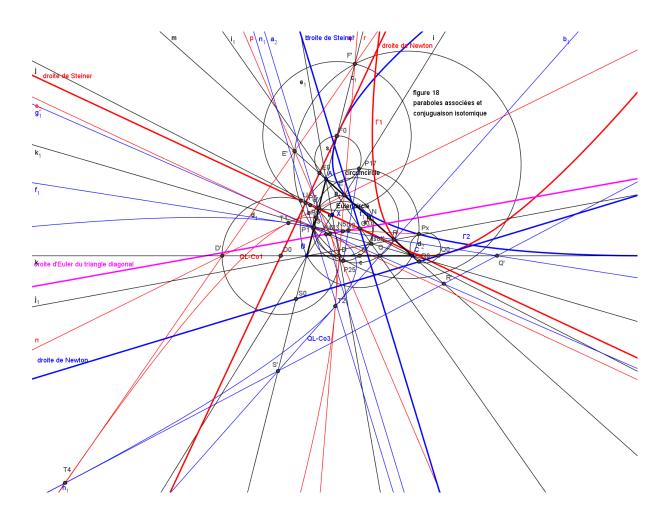
Les foyers des 2 paraboles M et M $\delta$  sont sur le cercle d'Euler du triangle diagonal et les 2 directrices se coupent en O $\delta$ .

Les tangentes à la 2<sup>nde</sup> parabole aux points de contact forment un 2<sup>nd</sup> QC associé ayant même triangle diagonal que le 1<sup>er</sup>, qui est aussi le triangle diagonal du QA des 4 points de contact.

Les droites de Newton des 2 quadrilatères complets se coupent au barycentre des 4 points.

Surtout, les 4 droites Di formant le 1<sup>er</sup> QC et les 4 droites D'i formant le 2<sup>nd</sup> sont des transversales isotomiques, çàd que chaque couple de droites Di et D'i tangentes à Co1 et à Co3 au même point de contact coupe chaque côté du triangle diagonal en 2 points symétriques par rapport au milieu; il en va de même pour les 2 droites de Newton.

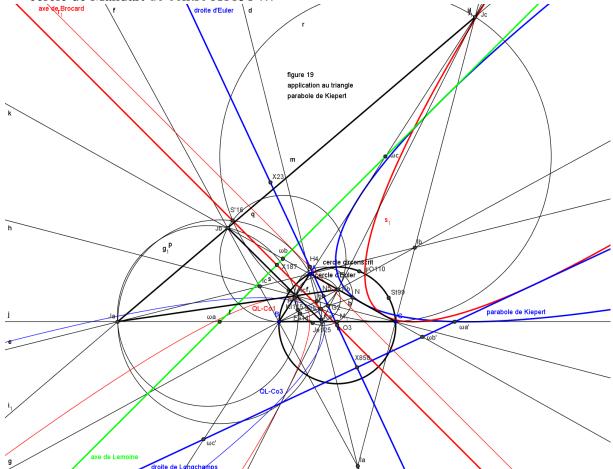
Ceci signifie que les 4 centres de perspective des 4 triangles de référence des 2 quadrilatères complets avec le triangle diagonal sont conjugués isotomiques par rapport à ce triangle.



# b. Application au triangle (figure 19)

On peut trouver un certain nombre d'applications intéressantes en prenant comme triangle de base le triangle diagonal et comme centres de perspective des points connus du triangle.

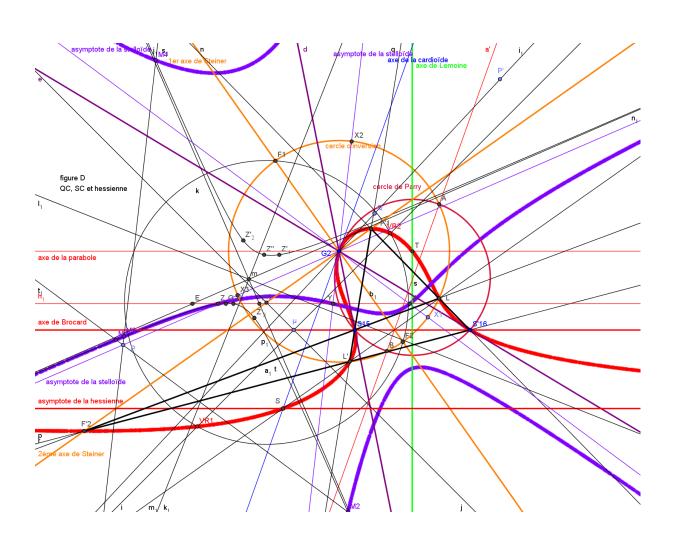
- Pour II et son conjugué isotomique X75, le 1<sup>er</sup> QC est celui décrit dans la figure 2, les points de Plücker étant les points isodynamiques S15 et S'16. Le triangle cévien de II est le triangle incentral DEF et le cercle cévien coupe le cercle d'Euler aux points Fe11 et Ki115. La parabole Co1 a pour foyer le point de Kiepert Ki115 et pour directrice l'axe de Brocard; la parabole Co3 a pour foyer le point de Jerabek Je125 et pour directrice la droite d'Euler. La parabole Γ1 est la parabole de Kiepert, tangente aux 3 côtés et à l'axe de Lemoine; elle a pour foyer ψO110 et pour directrice la droite d'Euler. La parabole Γ2 est tangente aux 3 côtés et à la droite de Longchamps; elle a pour foyer le point de Steiner St99 et pour directrice la droite H4IsoH69 ou IsoCoEuler, parallèle à l'axe de Brocard.
- Pour G2, qui est son propre conjugué isotomique, le triangle cévien est le triangle médial MNP, triangle podaire de O3, et le cercle cévien est le cercle d'Euler; la parabole Co1 est la même que pour I1 et a pour foyer Ki115 et pour directrice l'axe de Brocard.
- Le conjugué isotomique de H4 est IsoH69, anticomplément du point de Lemoine K6. Pour H4, le triangle cévien et podaire est le triangle orthique RST et le cercle cévien est encore le cercle d'Euler; la 4<sup>ème</sup> droite du QC est l'axe orthique. La parabole Co1 est à nouveau celle de I1 et de G2, de foyer Ki115 et de directrice l'axe de Brocard; cette parabole remarquable est inscrite dans les triangles céviens de I1, G2 et H4, DEF, MNP et RST.
- Les points de Gergonne Ge7 et de Nagel Na8 sont conjugués isotomiques. Pour Ge7, le triangle cévien est le triangle podaire def de I1 et le cercle cévien est le cercle inscrit ; le foyer de la parabole Co1 est le point de Feuerbach Fe11. Pour Na8, le cercle cévien est le cercle de Mandart de centre X1158 ...



### Troisième partie

### La transformation ψ,

### la stelloïde cubique et sa hessienne



#### A) Stelloïde cubique

### **1.** Définition et première construction de la courbe de Mac Cay (figure 20)

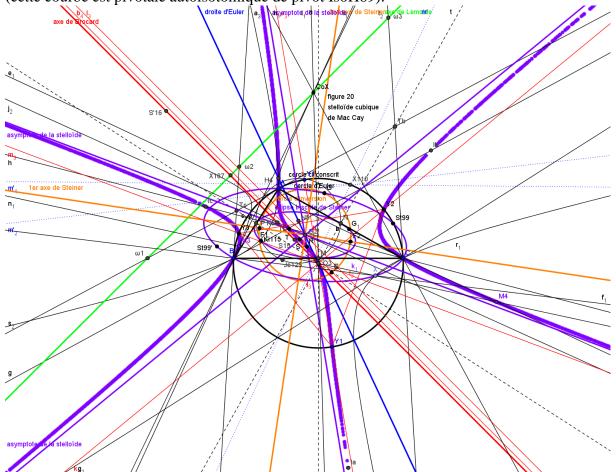
On donne un triangle de référence ABC et la transformation isogonale  $X\rightarrow CoX$ . On appelle arguésienne d'une courbe quelconque (C) la courbe ( $\Gamma$ ) décrite par le conjugué isogonal CoX d'un point X de (C). Une droite (D) a pour arguésienne une conique circonscrite au triangle ABC, ellipse, parabole ou hyperbole selon que (D) coupe le cercle circonscrit en 0,1 ou 2 points. Si la droite (D) passe par le centre O3 du cercle circonscrit, son arguésienne est une hyperbole équilatère passant par les 3 sommets A, B et C et par l'orthocentre H4.

La stelloïde cubique de Mac Cay, référencée K003 par B. Gibert, est le lieu des intersections du faisceau de droites par O3 avec leurs arguésiennes, faisceau d'hyperboles équilatères par A, B, C et H4; pour une droite, les 2 intersections sont des conjugués isogonaux alignés avec le point O3; la courbe est donc auto-isogonale de pivot O3. Sur la figure 20, lorsque X décrit l'axe de Lemoine, CoX décrit son arguésienne, l'ellipse circonscrite de Steiner.

Cette courbe de Mac Cay passe par les points A, B, C, O3 et H4 et par les centres des cercles inscrit, I1 et exinscrits, Ia, Ib et Ic; elle passe aussi par les traces de O3 sur les 3 côtés.

Il existe d'autres cubiques pivotales auto-isogonales passant par les points A, B, C, O3 et H4 et I1 et Ia, Ib et Ic; ainsi, les cubiques de Thomson (K002), orthocubique (K006), de Napoléon-Feuerbach (K005), de Darboux (K004) et de Neuberg (K001) ont pour pivots respectifs les points G2, H4, N4, L20 et X30.

La courbe de Darboux, appelée cévienne-podaire est le lieu des points dont le triangle podaire est le triangle pédal d'un autre point ; réciproquement, la courbe de Lucas, appelée podaire-cévienne, est le lieu des points dont le triangle pédal est le triangle podaire d'un autre point (cette courbe est pivotale autoisotomique de pivot IsoH69).

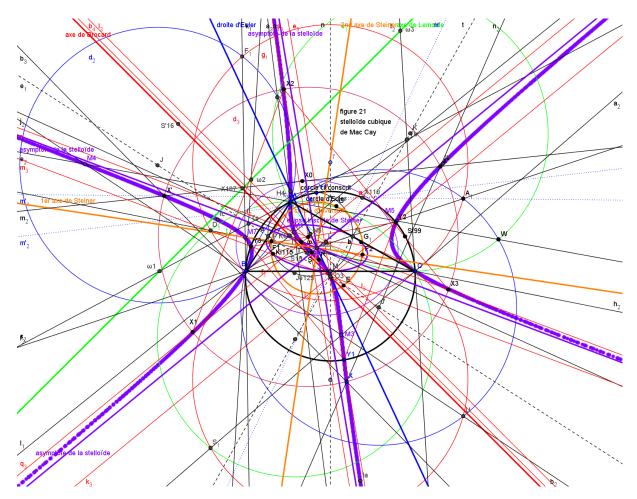


# **2.** Seconde construction de la courbe de Mac Cay (figure 21)

Le cercle podaire de X et CoX est tangent au cercle d'Euler en un point  $\phi$ , orthopole de la droite O3X et centre de l'hyperbole équilatère passant par les points A, B, C, H4, X et CoX. Ainsi, par exemple, les hyperboles équilatères de Feuerbach, Kiepert et Jerabek sont les arguésiennes de la droite de Bevan I1O3, de l'axe de Brocard O3K6 et de la droite d'Euler G2O3, dont les orthopoles respectifs sont les points du même nom Fe11, Ki115 et Je125; l'hyperbole équilatère de Kiepert du triangle antimédial du triangle orthique est l'arguésienne d'une droite passant par O3, dont l'orthopole est X130 (cf page 13).

Cette courbe est aussi le lieu des points centres radicaux de 3 cercles de rayon égal et passant par 2 des 3 sommets, d'où la construction suivante, due à B. Gibert. On choisit un point I sur la médiatrice de BC et son symétrique I' par rapport à BC. On construit sans difficulté les points J et J' sur la médiatrice de AB symétriques par rapport à AB et K et K' sur la médiatrice de AC symétriques par rapport à AC et tels que BJ = BJ' BI = BI' et CK = CK' = CI = CI'. On obtient 3 paires de cercles de même rayon et 2 à 2 symétriques par rapport aux 3 côtés et 8 centres radicaux qui décrivent la courbe lorsque I décrit la médiatrice de BC.

La courbe est enfin le lieu des points M tels que <MA,BC> + <MB,AC> + <MC,AB> =  $\pi/2$ . Cette propriété est vraie pour une infinité de triangles, appelés pivots, de la courbe ; tous ces triangles de pivots ont en commun le centre de gravité G2 et les 2 foyers F1 et F2 de l'ellipse inscrite de Steiner. Le cercle circonscrit à chaque triangle de pivots recoupe la courbe en 3 points sommets d'un triangle équilatéral, dont les médiatrices sont parallèles aux asymptotes. Le triangle ABC tel que son centre du cercle circonscrit O3 et son orthocentre H4 soient sur la courbe, la droite d'Euler lui étant tangente en O3, est le triangle de pivots principal.



#### **3.** Construction des courbes de Mac Cay et Kjp (figure 22)

On peut définir de même une famille de courbes appelées stelloïdes cubiques, comme le lieu, pour un angle  $\theta$ , des points P tels que  $\langle PA,BC \rangle + \langle PB,AC \rangle + \langle PC,BA \rangle = \pi/2 - \theta$  et dont le cercle podaire de P et de CoP fait avec le cercle d'Euler un angle  $\theta$ .

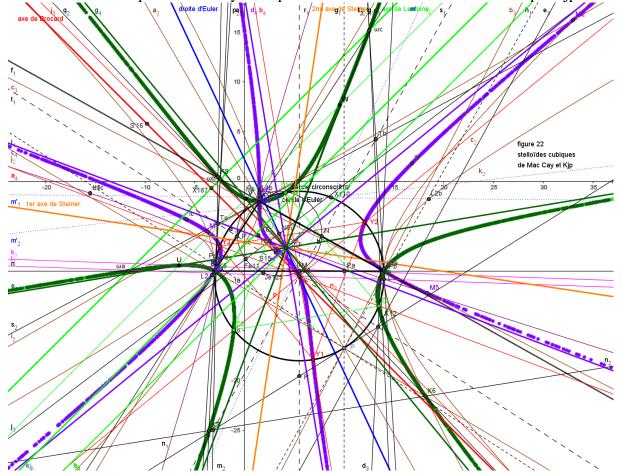
Elles ont toutes 3 asymptotes passant par le point G2 et faisant entre elles des angles de  $\pi/3$ ; elles coupent leurs asymptotes en 3 points alignés sur la droite satellite de la droite à l'infini, qui passe par le point transformé de X187 (milieu de S15S'16) dans l'homothétie de centre G2 et de rapport 2/3 et faisant un angle  $\theta$  avec la droite de Brocard.

On s'intéresse ici aux 2 cubiques particulières de Mac Cay et Kjp, obtenues respectivement pour  $\theta=0$  et  $\theta=\pi/2$ ; leurs asymptotes sont écartées de l'angle  $\pi/6$ , celles de Mac Cay sont perpendiculaires aux côtés des triangles de Morley et celles de Kjp leur sont parallèles.

Kjp passe les sommets du triangle ABC, comme Mac Cay, et par les centres des 3 cercles d'Apollonius  $\omega a$ ,  $\omega b$  et  $\omega c$ ; pour les sommets, les tangentes à Mac Cay sont les 3 hauteurs et les tangentes à Kjp sont parallèles aux 3 côtés.

La construction présentée sur la figure 17 et fournie par B. Gibert permet d'obtenir les 2 courbes en même temps. On donne un point P sur le cercle circonscrit ; la parallèle par le centre du cercle O3 à la droite de Simson de P recoupe le cercle circonscrit en 2 points L1 et L2. La droite AP recoupe l'hyperbole équilatère centrée au milieu de BC et passant par B et C et L1 et L2 en 2 points de la cubique Kjp K1 et K2 ; leurs conjugués isogonaux K'1 et K'2 sont aussi sur la cubique et K1K'2 et K2K'1 se coupent en ωa et K1K2 et K'1K'2 au point d'intersection de la médiatrice de BC avec la tangente en P au cercle circonscrit.

La perpendiculaire en A à AP recoupe la même hyperbole équilatère en 2 points M1 et M2 de la cubique de Mac Cay; en procédant de même avec les 2 hyperboles équilatères centrées aux milieux de AB et AC et passant par A, B, L1 et L2 et par A, C, L1 et L2, on obtient 6 points M1 à M6 de la cubique de Mac Cay et 12 points K1 à K6 et K'1 à K'6 de la cubique Kjp.



# **4.** Conique polaire et transformation ψ (figure 23)

On peut mener généralement d'un point P quelconque 6 tangentes à une cubique ; les points de contact avec la courbe (réels ou imaginaires) sont sur une conique, qui constitue la conique polaire du point P par rapport à la cubique. La polaire de P par rapport à la conique constitue la courbe polaire de degré n-1 par rapport à la conique et n-2 par rapport à la cubique.

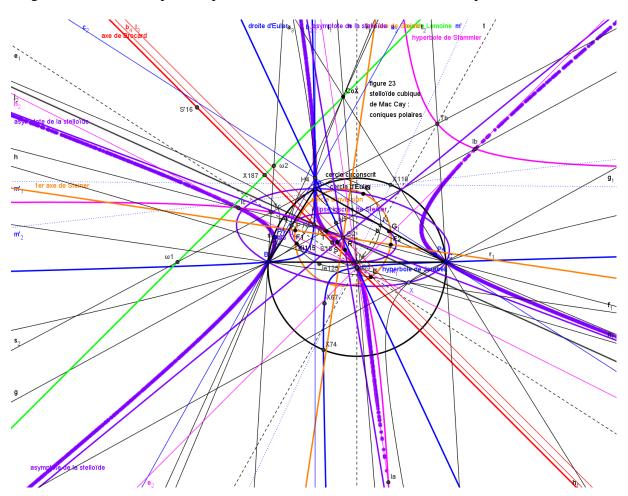
La transformation qui associe à tout point P du plan le centre P' de sa conique polaire est une involution réciproque, le point P étant le centre de la conique polaire de P'.

Chaque tangente recoupe la cubique en un point appelé tangentiel du point de contact ; pour les 6 tangentes menées d'un même point P, les 6 tangentiels sont sur une 2<sup>nde</sup> conique.

Pour la stelloïde cubique, les coniques polaires constituent un réseau ponctuel d'hyperboles équilatères et la transformation qui associe à tout point P du plan le centre de sa conique polaire est la transformation ψ, centrée au point de concours des 3 asymptotes de la courbe. Les asymptotes de cette hyperbole équilatère sont les bissectrices de l'angle entre P'G2 et la parallèle par P' à l'axe de Brocard (Mac Cay) ou de Lemoine (Kjp).

Cette transformation  $\psi$  est la même pour toutes les stelloïdes cubiques définies précédemment à partir d'un triangle de base ABC, en particulier pour les 2 courbes Mac Cay et Kjp. La transformation a pour points invariants les 2 foyers de l'ellipse inscrite de Steiner.

Pour la cubique de Mac Cay, par exemple, les coniques polaires de O3 et H4 sont les hyperboles équilatères de Stammler et Jerabek, centrées aux points ψO110 et ψH125, les tangentes issues de O3 passant par H4, Ia, Ib et Ic et celles issues de H4 par A, B, C et O3.



#### B. Hessienne ou cubique circulaire focale de Van Rees

**1.** Définition et 1<sup>ère</sup> construction (figure 24)

La hessienne d'une cubique est le lieu des points pour lesquels la conique polaire par rapport à la cubique dégénère en 2 droites ; la transformation qui associe à un point P du plan le centre de sa conique polaire laisse par construction la hessienne globalement invariante.

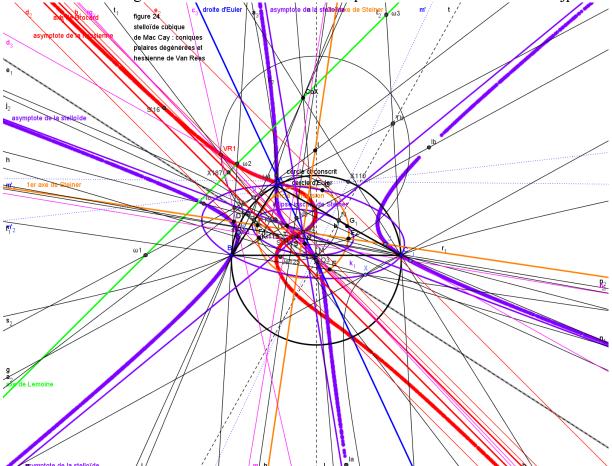
Pour la stelloïde cubique, les coniques polaires sont des hyperboles équilatères ; pour les points de la hessienne, elles dégénèrent en un couple de droites perpendiculaires.

Les hessiennes des 2 stelloïdes cubiques étudiées sont les courbes circulaires focales de Van Rees, unicursale pour la hessienne de Mac Cay et bicursale pour celle de Kjp; elles sont référencées respectivement K048 et K193 par B. Gibert.

Ces 2 courbes passent par les points G2, S15 et S'16 du triangle ABC ou MSS' du QC; elles passent par les 6 sommets du QC et par les pieds des hauteurs de son triangle diagonal. Elles ont pour asymptotes les droites parallèles à la droite de Newton du QC, axe de Brocard ou axe de Lemoine du triangle ABC, s'en déduisant dans une homothétie de centre G2 ou M et de rapport 2. Elles coupent cette asymptote en un point M1 situé à l'intersection avec la droite symétrique de la parallèle par G2 à la droite de Newton par rapport à l'axe de Steiner; ces 2 droites sont les axes de la parabole et de la cardioïde pour le QC.

Ces 2 courbes sont invariantes dans la transformation  $\psi$ , qui échange S15 et S'16 ou S et S' et autoisogonales par rapport au triangle G2S15S'16 ou GSS', par rapport à chacun des 4 triangles de référence du QC et par rapport au triangle orthique du triangle diagonal, les couples de points conjugués étant les foyers des coniques inscrites.

Ces 2 courbes sont enfin anallagmatiques, les centres d'inversion étant les 2 points F'1 et F'2 du 2<sup>nd</sup> axe de Steiner pour la hessienne unicursale de Mac Cay et les centres des cercles inscrit et exinscrits du triangle GSS' sur les 2 axes de Steiner pour la hessienne bicursale de Kjp.

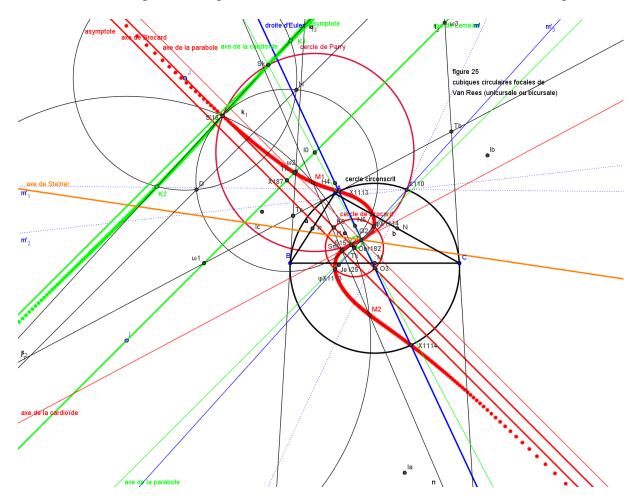


# **2.** Autres constructions (figure 25)

On peut donner 4 constructions intéressantes de ces 2 hessiennes de Van Rees en utilisant les différentes propriétés de ces courbes indifféremment à partir du triangle ou du QC, la droite de Newton étant l'axe de Brocard S15S'16 ou de Lemoine, médiatrice de ce segment :

- la 1ère donne un couple de points conjugués : pour un point μ variable de la droite de Newton, on trace les 2 bissectrices intérieure et extèrieure de l'angle <F1μF2> ; la bissectrice extérieure coupe le 2<sup>nd</sup> axe de Steiner en un point I et le 1er en J. La bissectrice intérieure coupe le cercle de centre I par F1 et F2 en 2 points conjugués X et X' et les 2 cercles de centres I et J par X et X' sont des autopoloconiques de la SC.
- la 2<sup>nde</sup> donne 2 points X et X2 alignés avec G2 ou M : par un point variable J de la droite de Newton, on trace un cercle orthogonal au cercle de diamètre S15S'16 ; les extrémités des diamètres de ces cercles passant par G2 décrivent la courbe.
- la 3<sup>ème</sup> est symétrique de la 2<sup>nde</sup> : par un point variable K de la médiatrice de SS' ou de SS', on trace un cercle passant par S et S' ou orthogonal au cercle de diamètre SS'; les points de contact des tangentes issues de G2 ou M à ces cercles décrivent la courbe
- enfin la 4<sup>ème</sup> utilise la propriété d'anallagmicité : on considère les 2 droites parallèles à la droite de Newton par les points F'1 et F'2, les 2 paraboles de foyer G2 ou M et de directrices ces 2 droites et les 2 cercles de centres F'1 et F'2 passant par F1 et F2; la hessienne est l'enveloppe des cercles centrés sur une des 2 paraboles et orthogonaux au cercle correspondant, ces cercles étant bitangents à la hessienne.

On peut noter que la hessienne bicursale de Kjp est une courbe pivotale autoisogonale par rapport au triangle G2S15S'16, le pivot étant le point à l'infini de l'axe de Lemoine ou X512 de ETC; la courbe passe alors par les centres des cercles inscrit et exinscrits du triangle GSS'.



# **3.** Stelloïde cubique, hessienne, poloconiques et autopoloconiques (figure 26)

Lorsqu'on mène par un point P les 6 tangentes à une cubique, les points de contact sont sur la conique polaire du point.

La poloconique d'une conique par rapport à une cubique est le lieu des centres des coniques polaires de cette cubique harmoniquement inscrites, çàd apolaires, à cette conique. Cette relation est réciproque, une conique étant la poloconique de sa poloconique.

Lorsque la conique est confondue avec sa poloconique, elle est dite autopoloconique.

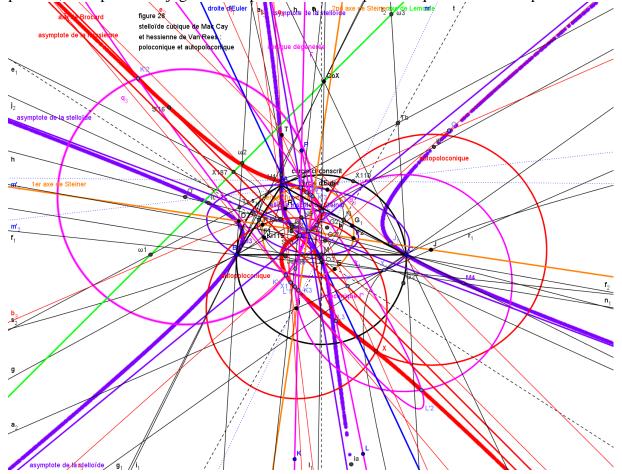
Les coniques et leurs poloconiques coupent la hessienne de la cubique en 6 paires de points conjugués ; en particulier, les coniques polaires d'un point par rapport à une cubique et à sa hessienne sont réciproquement poloconiques.

Dans le cas de la stelloïde cubique, les coniques inscrites dans le QC constituent le réseau tangentiel des coniques apolaires de la cubique ; elles sont apolaires à toutes les coniques du réseau ponctuel des coniques polaires et n'ont pas de poloconique.

Selon la position du point P par rapport à la stelloïde cubique et sa hessienne, on observe :

- P quelconque 2 coniques polaires, dont une est une hyperbole équilatère
- P sur la SC l'hyperbole équilatère est tangente en P à la stelloïde cubique
- P sur la hessienne la conique polaire par rapport à la SC est dégénérée en 2 droites perpendiculaires qui portent les points de contact des tangentes issues de P à la stelloïde et à la hessienne (le segment XX' joint 2 points conjugués de la hessienne)
- P sur la droite de Newton (axe de Brocard pour Mac Cay, de Lemoine pour Kjp) les 2 coniques polaires sont 2 hyperboles équilatères réciproquement poloconiques

Deux droites par un point P forment une conique dégénérée  $\Gamma$ ; elle coupe la hessienne en 6 points. Les 2 cercles CSC des 2 droites passent par le point G2 ou M et par le conjugué du point P; les 6 points conjugués des 6 points sont sur la poloconique  $\Gamma$ ' de la conique  $\Gamma$ .



#### C) Liens entre le triangle, le QC et la transformation y

1. Triangle GSS' (figure 27)

Le triangle G2S15S'16 du triangle ABC est inscrit dans le cercle de Parry qui passe par les points ψO110 et ψK111; la transformation ψ échange les 2 points S15 et S'16 et le cercle de Parry et l'axe de Brocard ainsi que le cercle circonscrit et le cercle de Brocard.

Le triangle MSS' du quadrilatère complet peut être considéré à la fois comme un QC dégénéré avec les 2 droites MS et MS' et la droite de Brocard comme droite double et comme un triangle de référence de ce QC, la Cl-S échangeant les points S et S' et le cercle circonscrit à M, S et S' et la droite SS'.

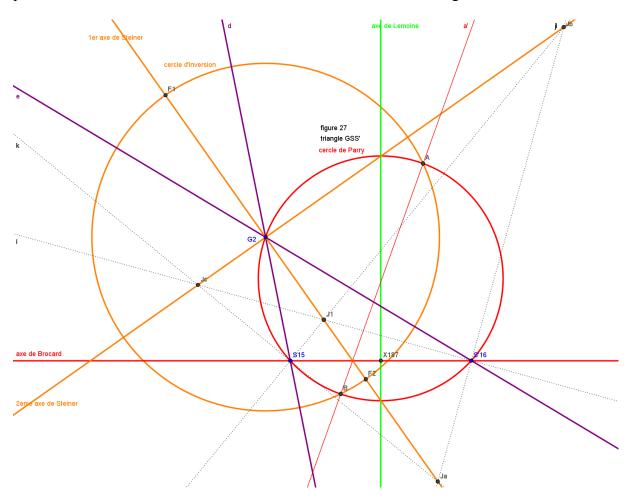
La transformation  $\psi$  du triangle et la transformation Cl-S du quadrilatère complet sont donc identiques, ainsi que les triangles G2S15S'16 du triangle et MSS' du QC.

La stelloïde cubique conjuguée du QC est l'une des 2 stelloïdes cubiques de Mac Cay ou Kjp d'un triangle ABC, qui est leur triangle de pivots principal.

A partir de tout triangle de 3 points caractéristiques d'un triangle ABC, il est possible de retrouver ce triangle.

On a vu que le triangle G2S15S'16 détermine la transformation  $\psi$ , les axes et les foyers des ellipses inscrite et circonscrite de Steiner (la  $2^{nde}$  se déduisant de la première dans l'homothétie de centre G2 et de rapport 2) et les axes de Brocard et de Lemoine.

On note que l'hyperbole équilatère de Stammler du triangle ABC, centrée en  $\psi$ O110, qui passe par O3 et K6 et par les centres des cercles inscrit et exinscrits I1, Ia, Ib et Ic passe aussi par les centres des cercles inscrit et exinscrits J1, Ja, Jb et Jc du triangle G2S15S'16.



# **2.** Triangle de pivots principal de la stelloïde cubique (figure 28)

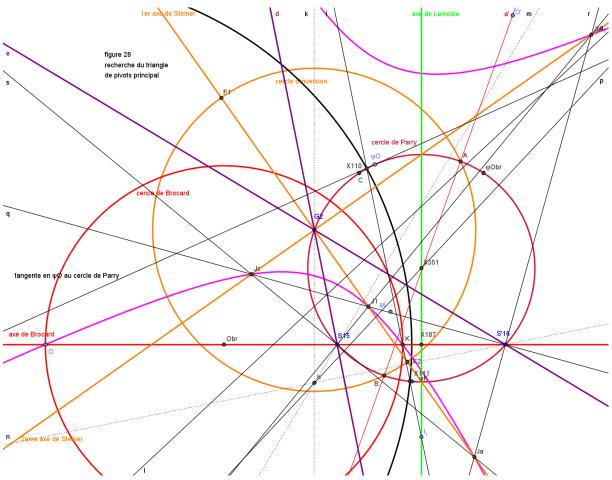
Si l'on souhaite une solution exacte, le plus simple est de tracer les stelloïdes cubiques cubiques Mac Cay et Kjp; les 2 cubiques se coupent aux 3 points A, B et C. Si l'on dispose seulement de Mac Cay, l'axe de Brocard coupe cette courbe aux points O3 et H4 et la droite d'Euler lui est tangente en O3; on détermine ensuite les points K6,  $\psi$ O110,  $\psi$ H125 et  $\psi$ K111 et le cercle circonscrit et les ellipses inscrite et circonscrite de Steiner, centrées en G2, ou l'hyperbole de Jerabek, centrée en  $\psi$ H125 et passant par O3, H4 et K6 ...

On peut se contenter d'une solution approximative en partant d'un point O variable sur l'axe de Brocard ; son conjugué  $\psi$ O est sur le cercle de Parry et sa polaire par rapport au cercle de Parry, qui passe par le pole I de l'axe de Brocard par rapport au cercle de Parry, recoupe ce cercle en X110 et X111 et l'axe de Brocard en K. Le milieu de OK est Obr et on construit les conjugués  $\psi$ K et  $\psi$ Obr

Le point O est en O3 lorque la tangente en  $\psi$ O au cercle de Parry passe par O. K est alors en K6, Obr en Obr182,  $\psi$ O en  $\psi$ O110,  $\psi$ K en  $\psi$ K111 et  $\psi$ Obr en X23, symétrique de  $\psi$ O110 par rapport à l'axe de Lemoine et inverse de G2 par rapport au cercle circonscrit.

Les autres éléments suivants sont alors rassemblés :

- le cercle par G2, O3 et K6 passe par ψK111 et par ψI
- le symétrique de O3 par rapport à G2 est J381; la parallèle à G2ψO110 par J381 coupe G2S15 en F'14 et G2S'16 en F13, S15F'14 et S'16F13 sont parallèles à la droite d'Euler G2O3 et le cercle passant par G2, F13 et F'14 lui est tangent en G2
- l'hyperbole équilatère, qui passe par les centres des cercles inscrit et exinscrits J1, Ja, Jb et Jc du triangle GSS' et par O3 et K6 est centrée en ψO110



.

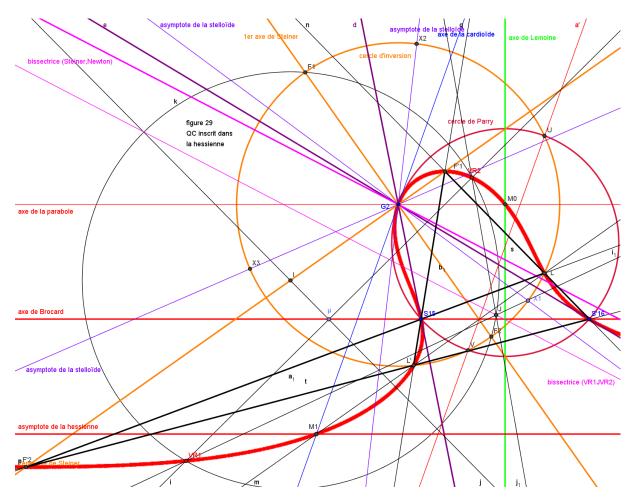
# **3.** QC inscrits dans la hessienne de Van Rees (figure 29)

Tous les QC inscrits dans la hessienne sont obtenus en traçant les 4 tangentes à 2 coniques quelconques ayant pour foyers 2 couples de points conjugués Cl-S. On peut même prendre les 2 coniques réduites aux 2 couples de points ; en ce cas, les 2 dernières intersections des 4 droites déterminent un 3ème couple de points conjugués Cl-S, derniers sommets du QC.

Il existe une infinité de QC inscrits dans la hessienne de Van Rees d'une même SC.

Tous ces QC ont une propriété fondamentale commune ; la somme des directions des 4 droites par rapport à une direction fixe est constante. Si l'on prend comme référence le 1<sup>er</sup> axe de Steiner F1F2 ou St, on a  $\Sigma(St,Di) = 2(St,\Delta n)$  ; on précisera ce point dans la conclusion. Tous les QC partagent les éléments suivants :

- même direction des bissectrices de l'angle des bissectrices en 2 points conjugués
- même stelloïde cubique conjuguée (lieu des centres des cardioïdes inscrites)
- même hessienne de Van Rees (lieu des foyers des coniques inscrites)
- même point de Miquel (point de concours des asymptotes de la SC)
- même droite de Newton (lieu des centres des coniques inscrites)
- même transformation Cl-S (points invariants F1 et F2, symétriques par rapport à M)
- même axe de la parabole (parallèle en M à la droite de Newton)
- même axe de la cardioïde (symétrique de l'axe de la parabole/ 1<sup>er</sup> axe de Steiner)
- même direction des axes de la deltoïde (parallèles aux asymptotes de la SC)
- même réseau des coniques inscrites (réseau tangentiel des coniques apolaires de la SC)
- même réseau d'hyperboles équilatères coupant harmoniquement les segments joignant 2 points conjugués (réseau ponctuel des coniques polaires de la SC)



#### Résumé

Au terme de ce dernier article, les liens entre le triangle et sa transformation  $\psi$  et le QC et sa transformation Cl-S apparaissent clairement au travers de la stelloïde cubique associée au triangle ou conjuguée du QC, de type Mac Cay ou Kjp, et de sa hessienne de Van Rees. La stelloïde cubique est le lieu des points M tels que (MA,BC) + (MB,AC) + (MC,AB) =  $\pi/2$  (Mac Cay) ou 0 (Kjp), le triangle ABC étant le triangle de pivots principal des deux courbes. Un quadrilatère complet détermine une stelloïde cubique conjuguée et sa hessienne ; il existe une infinité de quadrilatères complets inscrits dans la même hessienne. La transformation  $\psi$  peut être définie

- à partir de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle comme le produit d'une symétrie axiale par rapport à son axe principal et d'une inversion de centre G2
- à partir du quadrilatère complet comme l'involution qui échange les 3 couples de sommets opposés ou chaque droite et le cercle circonscrit au triangle des 3 autres
- à partir de la stelloïde cubique en associant à tout point P le centre de sa conique polaire par rapport à la cubique ; elle laisse la hessienne invariante

Les points fixes de cette transformation sont

- les foyers de l'ellipse inscrite de Steiner du triangle
- les intersections du 1<sup>er</sup> axe de Steiner avec le cercle d'inversion du QC
- les points communs à toutes les coniques polaires des points de la droite de l'infini par rapport à la stelloïde cubique (hyperboles équilatères centrées au point G)

Si on prend comme axe origine l'axe principal St des ellipses de Steiner du triangle ou premier axe de Steiner des quadrilatères complets et si on appelle Si les directions des 3 côtés du triangle et Di celles des 4 droites d'un QC, on a  $\Sigma$  (St,Di) =  $\Sigma$  (St,Si).

A une constante près, qui dépend de l'axe choisi comme origine, la somme des directions des 4 droites des QC inscrits dans la hessienne est égale à la somme des directions des 3 côtés du triangle de pivots principal de la stelloïde cubique conjuguée des QC.

Si on appelle Br l'axe de Brocard et Le celui de Lemoine, on a m $^{\circ}$   $\pi$ 

- dans le triangle ABC :  $\Sigma$  (St,Si) = (St,Le) =  $\pi/2$  + (St,Br)
- dans les QC :  $\Sigma$  (St,Di) = 2(St,Br) = 2(St,Le)

Les directions des droites de Morley du triangle ABC sont données par 1/3  $\Sigma$  (St,Si) m°  $\pi/3$  ou 1/3 (St,Le) =  $\pi/6 + 1/3$  (St,Br) et celles du triangle GSS' par 1/3 (St,Br) =  $\pi/6 + 1/3$  (St,Le). Les asymptotes de la stelloïde conjuguée des QC trisectent l'angle (St, $\Delta$ n) et sont perpendiculaires aux droites de Morley du triangle ABC et parallèles à celles du triangle GSS' pour la cubique de Mac Cay (la droite de Newton étant l'axe de Brocard) et sont, à l'inverse, parallèles aux droites de Morley du triangle ABC et perpendiculaires à celles du triangle GSS' pour la cubique Kjp (la droite de Newton étant l'axe de Lemoine).

> (point → centre de sa conique polaire)

Stelloïde cubique → Hessienne de (Mac Cay ou Kjp) Van Rees

#### **Bibliographie**

On indique ici seulement les références indispensables à la compréhension des 4 objets abordés dans cet article (triangle, QC, SC et transformation  $\psi$ ).

#### Triangle

- (1) T. Lalesco La géométrie du triangle Vuibert 1952
- (2) Michel Collet-Georges Griso Le cercle d'Euler Vuibert 1987
- (3) Yvonne et René Sortais La géométrie du triangle Hermann 1987
- (4) Paul Yu Introduction to the Geometry of the Triangle Forum Geometricorum 2001
- (5) John H. Conway-Steve Sigur The Triangle Book A. K. Peters 2013
- (6) Pierre L. Douillet Translation of Kimberling's Glossary into Barycentrics 2012

#### Quadrilatère complet

- (7) J. Steiner Théorème sur le Quadrilatère Complet Annales de Gergonne 1827
- (8) J.W. Clawson The Complete Quadrilateral 1919
- (9) Jean-Pierre Ehrmann Steiner's Theorems on the Complete Quadrilateral 2004
- (10) Bernard Keizer La Géométrie du Quadrilatère Complet 2013

#### Stelloïde cubique

- (11) Jules Marchand Etude géométrique des courbes apolaires à la paire ombilicale simple ou multiple (thèse présentée à Lausanne) A. Bussière 1924 et Géométrie du quadrilatère complet Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles 1937
- (12) Bernard Keizer Le Quadrilatère Complet et la Stelloïde Cubique 2014
- (13) Jean-Pierre Ehrmann-Bernard Gibert Special Isocubics in the Triangle Plane 2015
- (14) Bernard Gibert Inscribed Cardioïds and Eckart Cubics 2013

#### Transformation ψ

- (15) Bernard Gibert Orthocorrespondance and Orthopivotal Cubics Forum Geometricorum 2003
- (16) Benedetto Scimemi Simple Relations Regarding the Steiner Inellipse of a Triangle Forum Geometricorum 2010

#### Sites Internet

- <a href="http://bernardkeizer.blogspot.fr">http://bernardkeizer.blogspot.fr</a>, articles de Bernard Keizer
- <a href="http://retro.seals.ch/stelloïde">http://retro.seals.ch/stelloïde</a> cubique, article de Jules Marchand
- <u>www.mathworld.wolfram.com</u>, site de mathématiques de référence de Eric Weisstein
- <u>www.faculty.evansville.edu</u>, Encyclopedia of Triangle Centers ETC, site de Clark Kimberling consacré aux points remarquables du triangle
- www.douillet.info, site de Pierre L. Douillet
- <u>www.chrisvantienhoven.nl</u> , Encyclopedia of Quadri-Figures, site de Chris van Tienhoven consacré aux éléments remarquables des quadrangles et quadrilatères
- <u>www.bernard.gibert.pagesperso-orange.fr</u> , site de Bernard Gibert consacré aux cubiques

Προ των προθύρων των αυτου γραψας υπηρχε Πλάτων. Μηδεις άγεωμέτρητος είσίτω μου τήν στέγην. Τουτέστιν, άδικος μηδείς παρεισερχέσθω τηδε. Ισότης γαρ και δίκαιον έστι γεωμετρία.

Jean Tzetzès Chiliades VIII, 974-977

On peut traduire ce quatrain ainsi:

« Sur son portail, Platon avait fait graver cette inscription : Nul ne doit entrer sous mon toit, s'il n'est géomètre ; C'est-à-dire, nul ne doit s'introduire ici, s'il n'est juste ; Car la géométrie est égalité et justice. »

Henri-Dominique Saffray. Άγεωμέτρητος μηδειζ είσίτω. Une inscription légendaire. In : Revue des Etudes Grecques, tome 81, fascicule 384-385, janvier-juin 1968, p. 85